

Cuestión 1

Enuncie el teorema de las fuerzas vivas o teorema de la energía cinética. Explique qué son las fuerzas conservativas y qué relación tienen con la energía potencial.

Aplicando la ley de Newton de la dinámica se llega matemáticamente al teorema de la energía cinética:

$$\sum_{P_1}^{P_2} W_F = \Delta \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$$

Que nos dice que la suma de todos los trabajos de las fuerzas que actúan entre el punto **P1** y el punto **P2** se invierte en variar la expresión $\frac{1}{2} m v^2$, llamada **energía cinética**.

Fuerzas conservativas son aquellas cuyo trabajo entre dos puntos no depende de la trayectoria seguida para ir de uno a otro. La gravedad es una fuerza conservativa y al trabajo que hace cuando una masa m se traslada entre dos puntos y cambiado de signo, lo definimos como **variación de la energía potencial** de esa masa. Por ello:

$$W_{total} = W_c + W_{NC} = \Delta E_c \rightarrow -\Delta E_p + W_{NC} = \Delta E_c \rightarrow$$

$$W_{NC} = \Delta E_c + \Delta E_p \rightarrow |E_c + E_p = E_M| \rightarrow$$

$$W_{NC} = \Delta E_M$$

Que es el teorema de la energía mecánica, más cómodo que el de la energía cinética.

Problema 1

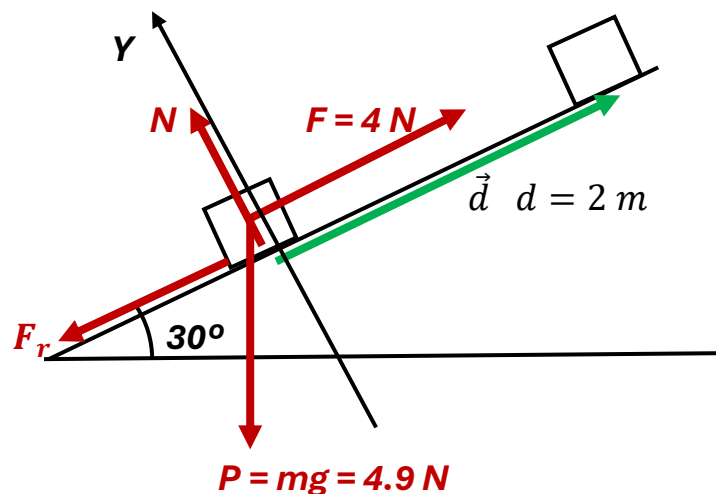
Un cuerpo de 0.5 kg, inicialmente en reposo, asciende por un plano inclinado 30° con respecto a la horizontal por el efecto de una fuerza de 4 N paralela a dicho plano. El coeficiente de rozamiento del cuerpo con la superficie es 0.2.

- a) Calcule el trabajo realizado por cada una de las fuerzas que intervienen cuando el cuerpo ha recorrido una distancia de 2 m.**
- b) Determine, mediante consideraciones energéticas, la velocidad del cuerpo después de recorrer dicha distancia.**

Datos. $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

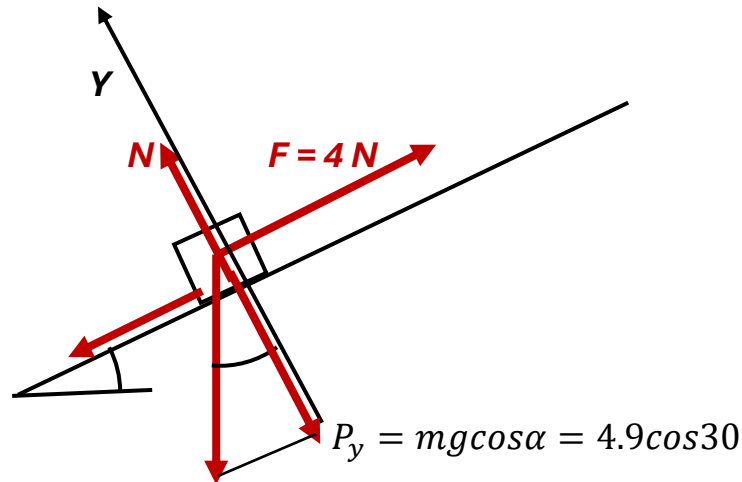
a)

Para variar, un dibujo nos facilitará mucho la visión del problema y su resolución. En él, vamos a dibujar todas las fuerzas, en rojo, y el desplazamiento efectuado por el cuerpo, en verde.



Para calcular el trabajo de las fuerzas nos hace falta primero, claramente, conocer su valor, además de su dirección y sentido. En este caso, nos hace falta calcular el valor de la normal y el de la fuerza de rozamiento. Para ello, como debemos de recordar,

hemos de aplicar que la resultante en el eje que hemos llamado **Y** sea nula puesto que no hay movimiento en esa dirección. Descomponemos, por lo tanto, la fuerza del peso sobre él, ya que la fuerza de **4 N** y el rozamiento no tienen componente en esa dirección pues son perpendiculares a **Y**.

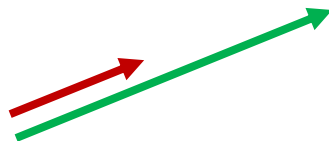


$$\sum F_y = 0 \rightarrow N = 4.9 \cos 30 = 4.9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2.45\sqrt{3} \text{ N}$$

$$F_r = \mu N = 0.2 \cdot 2.45\sqrt{3} = 0.49\sqrt{3} \text{ N}$$

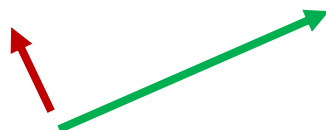
Conocidos los valores de todas las fuerzas, estamos en condiciones de calcular su trabajo y el trabajo total:

Trabajo de la fuerza $F = 4 \text{ N}$



$$W_F = F \cdot d \cdot \cos \widehat{\vec{F}\vec{d}} = 4 \cdot 2 \cdot \cos 0 = 8 \text{ J}$$

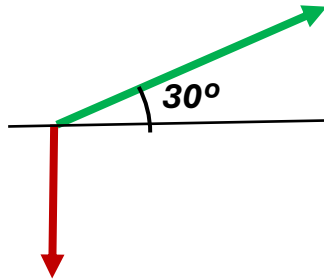
Trabajo de la normal



$$W_N = N \cdot d \cdot \cos \widehat{\vec{N}\vec{d}} = 2.45\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 90 = 0 \text{ J}$$

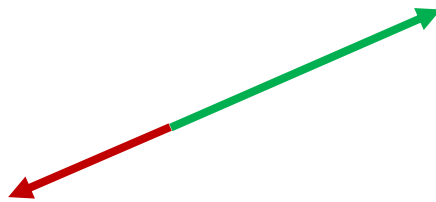
El trabajo de la normal en nuestros problemas siempre será nulo pues el ángulo que forma con el desplazamiento es 90.

Trabajo del peso



$$W_P = P \cdot d \cdot \cos \widehat{\vec{P}\vec{d}} = 4.9 \cdot 2 \cdot \cos(90 + 30) = 4.9 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -4.9 \text{ J}$$

Trabajo del rozamiento



$$W_{Fr} = F_r \cdot d \cdot \cos \widehat{\vec{F}_r\vec{d}} = 0.49 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 180 = -0.98\sqrt{3} \text{ J}$$

El trabajo total será la suma de todos los trabajos hallados:

$$W = W_F + W_N + W_P + W_{Fr} = 8 - 4.9 - 0.98\sqrt{3} \approx 1.40 \text{ J}$$

b)

Aplicando el teorema de las fuerzas vivas podemos calcular la velocidad al final del trayecto:

$$W_{TOTAL} = \Delta E_C \rightarrow 1.40 = \frac{1}{2} 0.5 \cdot v_f^2 - 0 \rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2.80}{0.5}} = 2.37 \text{ m/s}$$

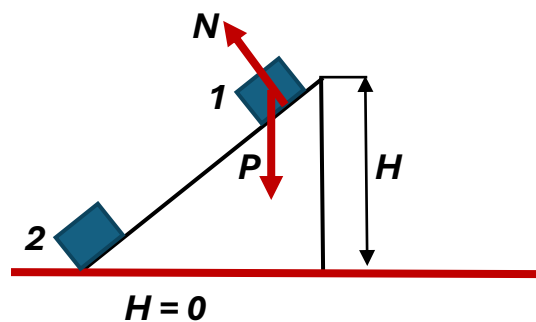
Problema 2

Dos bloques de masa m y $3m$ se sueltan en la parte superior de un plano inclinado sin rozamiento. Justifique razonadamente la relación entre:

- Las energías cinéticas.**
- Las velocidades de ambos bloques cuando llegan a la parte inferior del plano inclinado.**

a)

Sobre las masas sólo actúan dos fuerzas: el peso y la normal que, como sabemos, es perpendicular al desplazamiento y, por lo tanto, su trabajo es cero. Aplicando el teorema del trabajo entre el estado inicial, arriba en la parte superior del plano, y el estado final, cuando llegan al final del plano:



$$\begin{aligned}
 W_{NC} = W_N = 0 \\
 W_{NC} \uparrow_1^2 = Em_2 - Em_1 \rightarrow Em_1 = mgH \rightarrow 0 = \frac{1}{2}mv_2^2 - mgH \\
 Em_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \\
 \rightarrow v_2 = \sqrt{2gH} \text{ ms}^{-1}
 \end{aligned}$$

La velocidad en el punto **2** es la misma para las dos masas pues sólo depende de la altura, y ambas han partido desde la misma.

La relación entre las energías cinéticas:

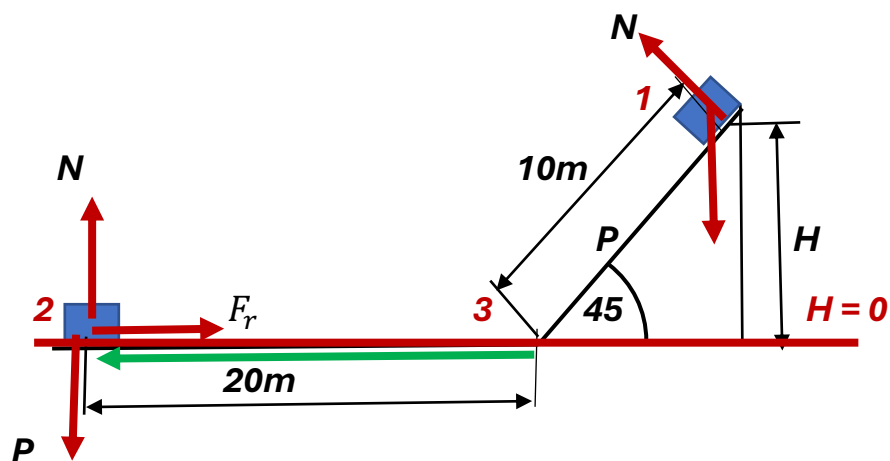
$$\begin{aligned} E_c(m) &= \frac{1}{2}m \cdot 2gH \\ E_c(3m) &= \frac{1}{2}3m \cdot 2gH \end{aligned} \rightarrow \frac{E_c(m)}{E_c(3m)} = \frac{1}{3}$$

Problema 3

Un cuerpo de masa 5 kg se encuentra inicialmente en reposo en la parte superior de una rampa sin rozamiento que forma un ángulo de 45° con la horizontal. El cuerpo desciende por la rampa recorriendo una distancia de 10 m y cuando llega al final de esta recorre 20 m sobre una superficie horizontal rugosa hasta que se detiene. Determine, utilizando consideraciones energéticas,

- La velocidad con la que llega al cuerpo al final de la rampa.
- El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la superficie horizontal.

Datos: $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$



a)

Para calcular la velocidad cuando llega a la base de la rampa aplicaremos el teorema del trabajo entre el punto 1 y el punto 3. Dado que la única fuerza no conservativa que actúa es la normal porque no hay rozamiento y, sabemos, que su trabajo es cero por ser

perpendicular al desplazamiento, podemos aplicar directamente que en ese tramo se conserva la energía. Entonces la potencial arriba será igual a la cinética en la base de la rampa:

$$Em_1 = Em_3 \rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_3^2 \rightarrow v_3 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2g \cdot 10 \cdot \text{sen}45} \rightarrow$$

$$v_3 \approx 11.77 \text{ ms}^{-1}$$

b)

Aplicamos el teorema del trabajo entre los puntos **1** y **2**:

$$W_{NC} \uparrow_1^2 = Em_2 - Em_1$$

$$\rightarrow W_{NC} = W_N + W_{Fr} = \left| \begin{matrix} W_N = 0 \\ F_R = \mu N = \mu mg \end{matrix} \right| = \mu mg \cdot 20 \cdot \cos 180$$

$$\rightarrow \begin{matrix} Em_1 = mgh = mg \cdot 10 \text{sen}45 \\ Em_2 = 0 \end{matrix}$$

La única fuerza no conservativa cuyo trabajo es distinto de cero es la fuerza de rozamiento, que sólo actúa en la parte horizontal. En esa parte, la normal es igual al peso y de ahí, multiplicando por el coeficiente, tenemos la fuerza de rozamiento. Su trabajo se calcula aplicando la definición y, como se debe de ver en la figura, teniendo en cuenta que el ángulo que forma la fuerza de rozamiento con el desplazamiento es de 180, pues son vectores en sentido contrario.

Sobre las energías mecánicas, inicial y final, creemos que no es difícil ver que en el estado **1** la energía es sólo potencial y en el estado **2** es nula, pues está parado y en el origen de alturas que hemos elegido, en la base de la rampa.

Finalizando los cálculos:

$$W_{NC} = -\mu mg 20$$

$$Em_1 = mg5\sqrt{2} \rightarrow -\mu mg 20 = 0 - mg5\sqrt{2} \rightarrow \mu = \frac{5\sqrt{2}}{20} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$Em_2 = 0$$

Para llegar al mismo resultado, también podríamos haber aplicado el teorema entre los puntos **2** y **3**.