

Cuestión 1

Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones acerca de las ondas estacionarias.

- a) La amplitud de la oscilación para cada punto del medio no depende de su posición.**
- b) La distancia entre 2 nodos consecutivos es igual a la longitud de onda.**

Las dos afirmaciones son falsas. Por tratarse de una onda estacionaria hay puntos cuya amplitud es cero, nodos, y puntos cuya amplitud es máxima, los vientres. Los demás puntos tienen amplitudes intermedias y en todos ellos, la amplitud con la que vibran depende de su posición.

La distancia entre dos nodos consecutivos es una semilongitud de onda y no una longitud de onda.

Problema 1

Una onda viene dada por la expresión

$$y(x, t) = 0.5 \cos 0.8x \sin 20t \text{ (S.I)}$$

Indique qué tipo de onda es y calcule su amplitud, frecuencia y longitud de onda, así como la velocidad de oscilación máxima de un punto situado en $x = 0.2 \text{ m}$

La expresión indica que estamos ante una onda estacionaria. Aplicando la teoría, debemos de saber:

$$\begin{aligned} A &= 0.5 \text{ m} \\ 0.8x \rightarrow 0.8 &= \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{0.8} = 0.025\pi \text{ m} \\ 20t \rightarrow 20 &= 2\pi f \rightarrow f = \frac{10}{\pi} \text{ Hz} \end{aligned}$$

La velocidad de vibración se obtiene derivando la expresión respecto al tiempo, considerando a la variable “x” constante:

$$v_v = \frac{\partial Y}{\partial t} = 0.5 \cos 0.8x \cos 20t \cdot 20 = 10 \cos 0.8x \cos 20t$$

Para $x = 0.2 \text{ m}$

$$v_v(x = 0.2, t) = 10 \cos(0.8 \cdot 0.2) \cos 20t$$

El valor máximo de una expresión que está multiplicada por un seno o coseno que depende de una variable (en este caso el tiempo) es cuando ese seno o coseno vale ± 1 . En nuestro caso:

$$v_{v.Max.} = 10 \cos(0.8 \cdot 0.2) = 9.87 \text{ m/s}$$

Recalcamos que para efectuar los cálculos **la calculadora debe estar en radianes.**

Problema 2

a) Explique qué características deben de tener dos ondas armónicas para que su superposición origine una onda estacionaria y cómo depende la amplitud de esta última con la posición.

b) Una onda estacionaria viene dada por la expresión

$$y(x, t) = 0.02 \sin(0.25\pi x) \cos(10\pi t) \text{ (S.I.)}$$

Determine las posiciones de los vientres de la onda estacionaria. Determine la amplitud y frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación de las ondas armónicas cuya superposición da lugar a la onda estacionaria.

a)

En nuestro nivel, podemos decir que una onda estacionaria se produce cuando una onda en una cuerda que viaja hacia la izquierda, por ejemplo, llega al otro extremo que está fijo e, invirtiendo su pulso, se traslada hacia la derecha e interfiere con la onda que viaja hacia la izquierda. Podemos modelizar matemáticamente la idea de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 y_{izd} &= A \sin(\omega t + kx) \\
 y_{dcha} &= -A \sin(\omega t - kx) \rightarrow Y = y_1 + y_2 \rightarrow \\
 Y &= A \sin(\omega t + kx) - A \sin(\omega t - kx) \\
 &= \left| \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right| \rightarrow \\
 Y &= 2A \cos \omega t \sin kx
 \end{aligned}$$

Donde el signo negativo de una de ellas, cualquiera de las dos, en nuestro caso se lo hemos puesto a la que hemos denotado por “**dcha**” proviene de que al rebotar en el extremo fijo el pulso se invierte.

Recalcar que se puede hacer de otras maneras (en vez de seno se puede poner coseno en las ondas que viajan a la izquierda y hacia la derecha, en vez de que la primera viaje hacia la izquierda puede ponerse hacia la derecha...) pero de todas las maneras llegamos a las mismas conclusiones:

La amplitud máxima es 2A

El coeficiente del tiempo es la frecuencia angular de las ondas que producen la onda estacionaria.

El coeficiente de la posición, x, es el número de onda, k, de las ondas que producen la onda estacionaria.

b)

La posición de los vientres, puntos de amplitud máxima, es cuando, según vemos en la ecuación de la onda estacionaria

$$y(x, t) = 0.02 \sin(0.25\pi x) \cos(10\pi t)$$

El seno de la amplitud resultante

$$A_r = 0.02 \sin(0.25\pi x)$$

Toma los valores máximos en valor absoluto:

$$\sin(0.25\pi x) = \pm 1 \rightarrow 0.25\pi x = \frac{\pi}{2} + n\pi \rightarrow x = \frac{1}{0.25} \left(\frac{1}{2} + n \right) \rightarrow$$

$$x_v = 4 \left(\frac{2n+1}{2} \right) = 2(2n+1) \rightarrow \begin{array}{l} n=0 \rightarrow x_1 = 2 \\ n=1 \rightarrow x_2 = 6 \\ n=2 \rightarrow x_3 = 10 \end{array}$$

Según hemos demostrado en la teoría del párrafo primero, el coeficiente primero es dos veces la amplitud de las ondas que han producido la onda estacionaria. Por lo tanto

$$2A = 0.02 \rightarrow A = \mathbf{0.01\ m}$$

Como también se ha recalcado, los coeficientes del tiempo y de la posición x son, respectivamente, la frecuencia angular y el número de onda de las ondas que han producido la interferencia:

$$\omega = 10\pi = 2\pi f \rightarrow f = \mathbf{5\ Hz}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 0.25\pi \rightarrow \lambda = \mathbf{8\ m}$$

$$v_o = \lambda \cdot f = 8 \cdot 5 = \mathbf{40\ m/s}$$

Y corroboramos que la distancia entre vientres ha de ser **4 m** por ser la longitud de onda **8 m**.

Problema 3

El valor del campo eléctrico asociado a una onda electromagnética que se propaga en un medio material en la dirección del eje X viene expresado por:

$$E(x, t) = 4 \text{sen}(3.43 \cdot 10^{15} t - 1.52 \cdot 10^7 x) \text{ N/C}$$

donde todas las magnitudes están expresadas en el SI. Calcular:

- La frecuencia y la longitud de onda asociadas a la onda electromagnética**
- La velocidad de propagación de la onda y el índice de refracción del medio por el cual se propaga**

Dato la velocidad de la luz en el vacío $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Como vemos, se trata de la ecuación de una onda. En ella se expresa la variación del campo eléctrico en función del tiempo y la posición. No nos debe de preocupar el que no se trate, como en la

ecuación clásica de la que se habla en clase, de la posición “**Y**” de los puntos del agua, por ejemplo, en su vibración ondulatoria.

Por lo tanto, el coeficiente del tiempo es la frecuencia angular y el coeficiente de la posición, **x**, el llamado número de onda **k**:

a)

$$\omega = 3.43 \cdot 10^{15} = 2\pi f \rightarrow f = \frac{3.43 \cdot 10^{15}}{2\pi} \text{ Hz}$$
$$k = 1.52 \cdot 10^7 = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{1.52 \cdot 10^7} \text{ m}$$

Con estos datos, es fácil calcular la velocidad:

b)

$$\lambda = \frac{v}{f} \rightarrow v = \lambda \cdot f = \frac{2\pi}{1.52 \cdot 10^7} \cdot \frac{3.43 \cdot 10^{15}}{2\pi} = 2.26 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Para calcular el índice de refracción aplicamos la definición:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{3 \cdot 10^8}{2.26 \cdot 10^8} = 1.33$$

Problema 4

Para el caso del espectro de emisión del hidrógeno, calcular:

- a) La longitud de onda de la segunda raya de la serie espectral de Lyman.**
- b) La energía de los fotones correspondientes a dicha emisión.**

Datos: Constante de Rydberg $R_H = 1.09 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$, constante de Planck $h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, velocidad de la luz en el vacío $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Hemos de saber que la serie de Lyman está formada por las distintas radiaciones que se forman cuando el electrón salta desde órbitas de número cuántico principal **$n \geq 2$** a la órbita **$n = 1$** . En nuestro

caso nos preguntan por la segunda raya espectral, lo que significa que el salto se produce de la órbita $n = 3$ a $n = 1$ (la primera correspondería al salto entre la órbita $n = 2$ a la órbita $n = 1$). Conocido entre qué órbitas se produce el salto, la longitud de onda de la radiación producida viene dada por:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

Donde n_f es el número cuántico de la órbita a la que llega y n_i es el número cuántico de la órbita de la que parte. En nuestro caso:

$$\begin{matrix} n_f = 1 \\ n_i = 3 \end{matrix} \rightarrow \frac{1}{\lambda} = 1.09 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{9} \right) \rightarrow \lambda = \mathbf{1.03 \cdot 10^{-7} m}$$

Conocida la longitud de onda y su velocidad, la de la luz, podemos calcular la frecuencia y, de ahí, aplicando la ley de Plank para la energía de un fotón, la energía de la radiación pedida:

$$\lambda = \frac{c}{f} \rightarrow f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{1.03 \cdot 10^{-7}} = \mathbf{2.91 \cdot 10^{15} Hz}$$

$$E = h \cdot f = 6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 2.91 \cdot 10^{15} = \mathbf{1.93 \cdot 10^{-18} J}$$