

Problema 1

El terremoto de Haití de 2010 provocó ondas mecánicas transversales que se propagaban por la superficie y cuyo desplazamiento vertical se puede modelizar por la expresión:

$$y(x, t) = A \sin(12.6t - 4.3x)$$

donde “x” es la distancia en kilómetros desde el epicentro del terremoto y “t” el tiempo en segundos.

- a) Determinar la longitud de onda frecuencia y velocidad de propagación de dichas ondas.**
- b) Los sismógrafos midieron una aceleración máxima de $0.2g$, donde g es la aceleración de la gravedad. Determinar el valor de la amplitud a en milímetros.**

a)

$$y(x, t) = A \sin(12.6t - 4.3x)$$

Debemos de recordar que, en esta ecuación, el coeficiente del tiempo es la frecuencia angular ω :

$$\omega = 12.6 = 2\pi f \rightarrow f = \frac{12.6}{2\pi} \text{ Hz}$$

El coeficiente de la posición, x , es lo que se llama número de onda, k :

$$k = 4.3 = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{4.3} \text{ km}$$

En el sistema internacional, el número de onda sería, entonces:

$$k = \frac{2\pi}{\frac{4.3}{10^3}} = 4.3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

Y la ecuación de la onda:

$$y(x, t) = A \sin(12.6t - 4.3 \cdot 10^{-3}x)$$

Para que la probabilidad de cometer errores sea lo más pequeña posible, recomendamos el uso del S.I. Con estos dos datos ya conocidos, estamos en condiciones de calcular la velocidad:

$$\lambda = \frac{v}{f} \rightarrow v = \lambda f = \frac{2\pi}{4.3} \cdot 10^3 \cdot \frac{12.6}{2\pi} = \mathbf{2.93 \cdot 10^3 \text{ m/s}}$$

b)

Por tratarse de un movimiento armónico, debemos de recordar que la aceleración máxima de vibración viene dada, en módulos, por:

$$a_M = \omega^2 \cdot A \rightarrow 0.2g = (12.6)^2 \cdot A \rightarrow A = \frac{0.2g}{(12.6)^2} = 0.012 \text{ m}$$

$$\mathbf{A = 12 \text{ mm}}$$

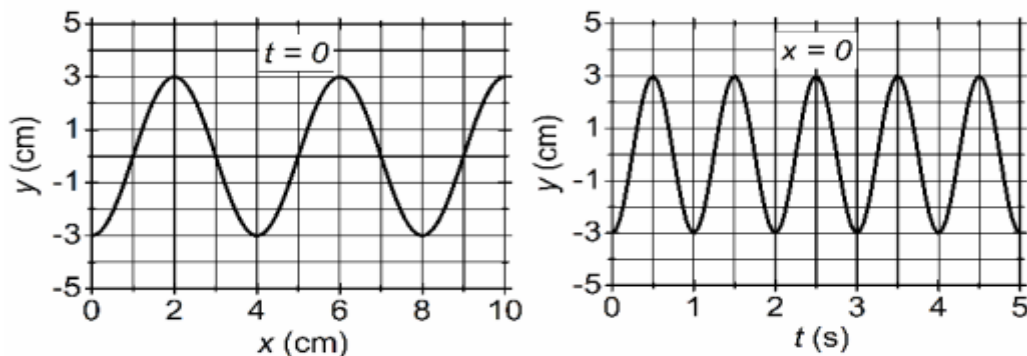
Si no nos acordamos de la fórmula de la aceleración máxima, también podíamos haber derivado la expresión de la onda respecto al tiempo dos veces para calcular la aceleración de vibración y de ella deducir su valor máximo

Problema 2

Una onda armónica transversal se propaga en el sentido positivo del eje x . En la figura se tiene una gráfica de la elongación de la onda para $t = 0$ y para $x = 0$. A partir de dicha información determine

a) la expresión matemática de la onda

b) la velocidad de propagación de la onda y la velocidad de oscilación del punto $x = 3 \text{ cm}$ en el tiempo $t = 1 \text{ s}$.



a

De la figura de la izquierda, la longitud de onda son **4 cm**, distancia entre dos picos. De la figura de la derecha se puede ver que el tiempo que tarda un punto en recorrer un ciclo es un segundo y que la amplitud del movimiento armónico es **3 cm**. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \lambda &= 0.04 \text{ m} \\ T &= 1 \text{ s} \\ A &= 0.03 \text{ m} \end{aligned} \rightarrow y(x, t) = 0.03 \text{sen} \left(\frac{2\pi}{1} t - \frac{2\pi}{0.04} x + \phi_0 \right)$$

Para calcular el ángulo inicial de fase necesitamos conocer las condiciones iniciales, cómo era la onda cuando empezamos a contar el tiempo. En la figura de la derecha, vemos:

$$t = 0 \rightarrow y(0, 0) = -0.03$$

Y sustituyendo en la ecuación de la onda:

$$-0.03 = 0.03 \operatorname{sen} \phi_0 \rightarrow \phi_0 = -\frac{\pi}{2} \rightarrow$$

$$y(x, t) = 0.03 \operatorname{sen} \left(2\pi t - 50\pi x - \frac{\pi}{2} \right)$$

b)

Con los datos que tenemos:

$$v_o = \frac{\lambda}{T} = \frac{0.04}{1} = \mathbf{0.04 \text{ m/s}}$$

La velocidad de vibración se calcula como la derivada de la función de onda respecto del tiempo:

$$v_v = \frac{\partial y}{\partial t} = 0.03 \cos \left(2\pi t - 50\pi x - \frac{\pi}{2} \right) \cdot 2\pi$$

$$v_v(x = 0.03, t = 1) = 0.03 \cdot 2\pi \cos \left(2\pi - 50\pi \cdot 0.03 - \frac{\pi}{2} \right) = \\ 0.06\pi \cos 0 = \mathbf{0.06\pi \text{ m/s}}$$

Por último, advertir que para definir la ecuación de la onda nosotros **hemos elegido el seno, pero, igualmente correcto, podíamos haber elegido el coseno. Cambiaría el ángulo de fase inicial.**

Problema 3

Por una cuerda dispuesta a lo largo del eje X viaja una onda armónica que desplaza los elementos de la cuerda en la dirección del eje Y. Se sabe que los elementos A y B, respectivamente ubicados en $x_A = 0$ y $x_B = 2$ m oscilan en fase y cortan al eje X cada 4 s. Teniendo en cuenta que no hay entre A y B ningún otro elemento que oscile en fase con ellos:

a) Calcule el valor de la velocidad de propagación.

b) Escriba la expresión matemática de la onda si esta viaja en el sentido negativo del eje X y en el instante inicial los elementos A y B presentan desplazamiento igual a 10 cm y velocidad nula.

a)

Dos puntos están en fase si la distancia entre ellos es una longitud de onda o un múltiplo de ella. Como nos dicen que entre ellos no hay ningún otro punto que esté en fase con ellos podemos deducir que la distancia que los separa es una longitud de onda.

Si cortan al eje X cada 4 s, ese tiempo es el semiperiodo. Si nos imaginamos que en un momento corta al eje X, por ejemplo, en la subida de su vibración, lo volverá a cortar en la bajada recorriendo por lo tanto la mitad de una vibración.

Podemos decir entonces:

$$\frac{\lambda = 2 \text{ m}}{T = 8 \text{ s}} \rightarrow \lambda = v \cdot T \rightarrow v = \frac{2}{8} = 0.25 \text{ m/s}$$

b)

La velocidad de vibración es cero en el punto más alto o bajo de la vibración, lo que llamamos amplitud. Por lo tanto, la amplitud de este movimiento ondulatorio es **10 cm**. La ecuación de la onda será, con los datos ya conocidos:

$$y(x, t) = A \sin(\omega t + kx + \phi) = \left| \begin{array}{l} A = 0.1 \\ \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4} \\ k = \frac{2\pi}{\lambda} = \pi \end{array} \right| \rightarrow$$

$$y = 0.1 \sin\left(\frac{\pi}{4}t + \pi x + \phi\right)$$

Donde el término en “**x**” lleva un **+** puesto que la onda se desplaza en el sentido negativo del eje **X**.

Para calcular el ángulo de fase inicial debemos tener en cuenta las condiciones iniciales del origen:

$$y = 0.1 \sin\left(\frac{\pi}{4}t + \pi x + \phi\right) \rightarrow \left| y(0,0) = 0.1 \rightarrow 0.1 = 0.1 \sin \phi \rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \right|$$

$$y(x, t) = \mathbf{0.1 \sin\left(\frac{\pi}{4}t + \pi x + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Como ya se ha dicho en otras ocasiones, podíamos haber descrito la onda por medio de un coseno. Entonces cambiaría el ángulo inicial de fase.