

LEYES DE LAS POTENCIAS

Definición:

Cuando un número se multiplica “**n**” veces por sí mismo se dice que ese número está elevado a la “**n**” y se escribe:

$$a \cdot a \cdot a \dots \cdot a = a^n$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$$

Donde, como se aprecia, el número que se multiplica por si mismo se pone “abajo” y se llama **base** y las veces que se multiplica se pone “arriba” y se llama **exponente**. Sabiendo la definición, pasamos a dar las leyes que podremos y deberemos utilizar muchas veces. En vez de dar la ley sin más, haremos ejemplos para que se entienda el porqué.

Producto o división de dos números elevado a una potencia

$$(3 \cdot 5)^2 = (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = 3^2 \cdot 5^2$$

De donde:

1ª ley

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

O, lo que es lo mismo, elevar un producto de números (o una división) a una potencia es igual al producto (o división) de los números elevados a esa potencia.

Producto de potencias de la misma base:

$$3^2 \cdot 3^4 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$$

Donde se ha puesto paréntesis para diferenciar ambas potencias, aunque después se han quitado puesto que, cuando sólo hay productos, son innecesarios. Viendo el ejemplo, podemos concluir que habrá tantos **“treses”** como **la suma de los exponentes de cada potencia, $2 + 4$** en nuestro ejemplo. Como conclusión, diremos:

2ª ley

$$b^n \cdot b^m = b^{n+m}$$

División de potencias de la misma base:

$$\frac{4^5}{4^3} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4}$$

$$\frac{4^5}{4^3} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4} \cdot \frac{4 \cdot 4}{1} = 1 \cdot 4 \cdot 4 = 4^2$$

Donde creemos que no es muy difícil ver que **“tres cuatros” del numerador se han simplificado con “tres cuatros” del denominador, quedándonos “dos cuatros arriba”**. Como conclusión diremos

3ª ley

$$\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$$

De la ley anterior deducimos la siguiente:

Número elevado al exponente “cero”

Según la ley anterior, la tercera:

$$\frac{b^m}{b^m} = b^{m-m} = b^0$$

Pero, por otro lado, el cociente de un número entre si mismo da como resultado la unidad:

$$\frac{b^m}{b^m} = 1$$

Por ello, igualando ambas

4ª ley

$$b^0 = 1$$

Potencia de una potencia:

$$(2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3+3+3} = 2^{3 \cdot 4}$$

Como conclusión

5ª ley

$$(b^m)^n = b^{m \cdot n}$$

Inverso de una potencia

$$\frac{1}{2^3} = \frac{2^0}{2^3} = 2^{0-3} = 2^{-3}$$

Cuya conclusión es:

6ª ley

$$\frac{1}{b^m} = b^{-m}$$

Raiz de un número

La siguiente ley, y última, es un poco más difícil de “ver”. Hemos pensado en decirla y nada más, pero al final, la vamos a deducir utilizando las leyes anteriores.

Supongamos que tenemos la ecuación

$$x^3 = 2^5 \rightarrow x \cdot x \cdot x = 2^5 \rightarrow (x \cdot x \cdot x)^{\frac{1}{3}} = (2^5)^{\frac{1}{3}} \rightarrow$$
$$x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = x^1 = x = 2^{\frac{5}{3}} \rightarrow$$

Y, utilizando el lenguaje de las raíces:

$$x^3 = 2^5 \rightarrow x = 2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5}$$

Generalizando

7ª ley

$$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$$

En la sección de ejercicios veremos cómo utilizar estas leyes para resolver y simplificar cálculos, incluidos los cálculos con radicales o raíces pues, como hemos visto, las raíces son en realidad potencias de exponente fraccionario.

Acabamos con un comentario importante referente a los signos del resultado de potenciar un número según sea negativo o positivo. Lo vemos con ejemplos.

Las potencias de números positivos siempre es otro número positivo.

Sin embargo, el signo del **resultado de las potencias de un número negativo depende de si el exponente es par o impar:**

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9 = 9$$

Como vemos, **si el exponente es par el resultado es positivo.**

$$(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = 9 \cdot (-3) = -3^3 = -27$$

Y si el exponente es negativo, el resultado es negativo también