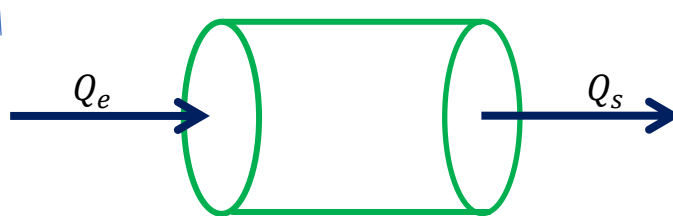


TEOREMA DE GAUSS

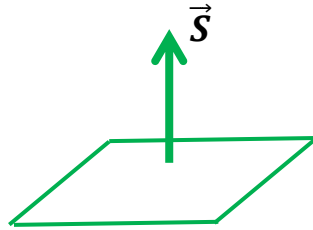
El teorema de Gauss para el campo eléctrico (también existe y es similar para el campo gravitatorio) es un teorema fundamental y que aparece en el programa de 2º de bachiller, aunque en muchos casos sólo se comenta y no se suelen poner problemas sobre ello en los exámenes. Es por ello que vamos a intentar definirlo de una manera práctica y sólo haremos un ejemplo de su aplicación (en física de 1º de universidad se hacen bastantes ejemplos sobre su aplicación al cálculo de campos eléctricos). Es nuestra pretensión que simplemente se entienda, aparte de dar la fórmula, por lo que empezamos con un ejemplo que pensamos es más intuitivo y que se refiere al caudal de agua por una tubería.

Sea la tubería de la figura en cuyo interior no hay fuentes de producción de agua (no hay “grifos” ni “sumideros”)

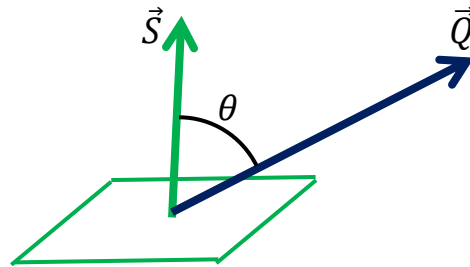


Evidentemente la cantidad de agua que entra por la izquierda por unidad de tiempo, caudal de entrada Q_e , es la misma que la que sale por la derecha, Q_s (recordar que en el interior de la tubería no hay fuentes ni sumideros de agua). Vamos a definir una magnitud matemática que nos permita, según sea su valor, saber si dentro de la tubería hay “productores” de caudal o no. Esta magnitud la vamos a llamar **flujo en una superficie** y se define de la siguiente manera:

$\vec{S}$: vector superficie. Perpendicular a la superficie. Módulo: su área



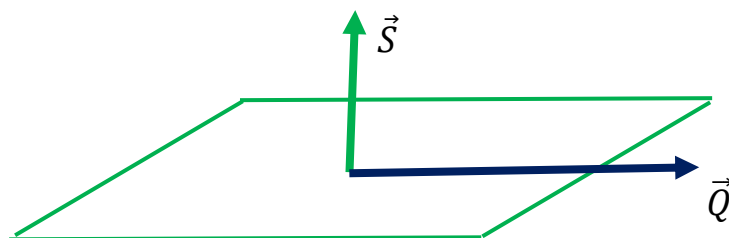
Si por esa superficie “pasa” una cantidad de agua o viento o cualquier característica vectorial definida por el vector $\vec{Q}$



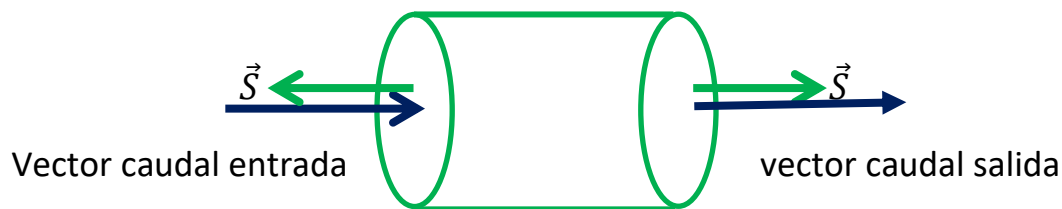
Se define el flujo ϕ del vector $\vec{Q}$ a través de la superficie $\vec{S}$ como el producto escalar de ambos vectores:

$$\phi = \vec{Q} \cdot \vec{S} = |\vec{Q}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos\theta$$

Si el ángulo que forman es 90 el flujo será cero porque realmente no entra ni sale nada hacia adentro o hacia afuera de la superficie pues el vector Q pasa “de perfil” por la superficie. Imaginemos que el vector $\vec{Q}$ representa la dirección del aire y la superficie es una vela. Si el ángulo es 90 el flujo será cero y el aire no producirá fuerza alguna sobre la vela, como podemos imaginarnos viendo la figura:



Si la superficie es cerrada convenimos que **el vector superficie va siempre hacia afuera**, de esta manera podemos **distinguir el flujo de entrada que será negativo del flujo de salida que será positivo**. Veámoslo con el ejemplo de la tubería:



$$\text{Flujo de entrada: } \phi_e = Q \cdot S \cdot \cos 180 = -Q \cdot S$$

$$\text{Flujo de salida: } \phi_s = Q \cdot S \cdot \cos 0 = Q \cdot S$$

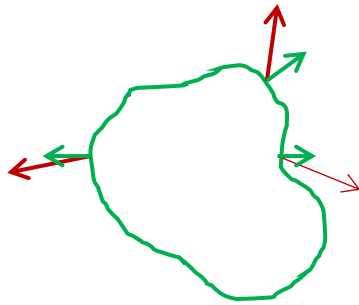
$$\phi_{total} = \phi_e + \phi_s = -QS + QS = 0$$

Donde, como hemos dicho antes, al no haber fuentes en el interior de la tubería los vectores **Q** son iguales. **Por lo tanto, vemos en este ejemplo que el flujo total es cero porque lo que entra es igual a lo que sale por no haber fuentes de producción de agua en el interior.** El teorema de Gauss diría en este caso que si la suma de los flujos no es cero es porque hay una fuente de producción de agua en el interior de esa tubería.

Hemos intentado con este ejemplo explicar dos cosas importantes:

Primero la definición de flujo por una superficie y segundo que cuando dentro de una tubería, **superficie cerrada**, no hay fuentes de producción de agua el flujo total debe ser cero. Pretendemos con ello que el teorema de Gauss del que vamos a hablar ahora no nos parezca tan abstracto como suele ocurrir en los libros. Veamos.

Sea una superficie **cerrada cualquiera** como la de la figura



En cuyos puntos puede haber un campo eléctrico representado por los vectores rojos de la figura. Los vectores pequeños, en verde, representan los vectores superficie, perpendiculares a ella en cada punto y hacia afuera como hemos quedado (esto es necesario porque el teorema ha de referirse a una **superficie cualquiera**).

Para calcular el flujo a través de esa superficie calculamos los flujos por cada una de esas “baldosas” muy pequeñas (infinitesimales) de cada vector campo eléctrico. El flujo total será la suma de todos los “flujitos”. Para hallar esa suma aseguramos aquí, sin demostración, **que la suma de muchísimos sumandos muy pequeñitos es una integral (ver aplicaciones de las integrales)**

El teorema de Gauss nos dice **que si el flujo total no es cero es porque, al igual que en la tubería, hay productores de campo eléctrico, cargas eléctricas, en su interior. La fórmula expresa la dependencia entre el flujo total en una superficie cerrada y la carga en su interior que es la productora del “caudal” eléctrico**

$$\phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{interior}}{\epsilon}$$

Fórmula que representa al teorema de Gauss

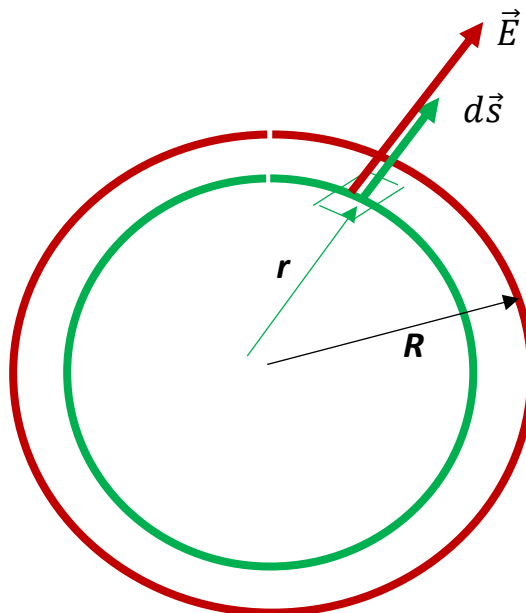
Como hemos comentado, vamos a hacer un ejemplo de **aplicación del teorema de Gauss para calcular el campo eléctrico** creado por una distribución de cargas NO PUNTUALES (si las cargas son puntuales se aplica directamente la ley de Coulomb a cada carga y se suman los distintos campos, como se ha hecho en ejemplos anteriores). Esta distribución va a

ser una esfera de radio R cargada uniformemente con una carga total Q . Como hay dos espacios claramente diferenciados, dentro de ella y fuera de ella, empezamos calculando el campo eléctrico en puntos de su interior, a distancias $r < R$

Para la aplicación del teorema tenemos que seguir unas pautas que, como hemos comentado, resumimos para este nivel de una manera simple:

1º Por los puntos en los que queramos calcular el campo hacemos pasar una “superficie gaussiana” en la cual el módulo del campo eléctrico, aunque desconocido, tenga valor constante. Esto es necesario para que no halla que resolver la integral según sea el valor del campo porque lo desconocemos. No preocuparse, **si la distribución de carga es esférica, las superficies gaussianas son también esferas.** En nuestro dibujo, la esfera roja es la que contiene la carga y la esfera verde es la superficie gaussiana a la que vamos a aplicar el teorema.

2º Se dibuja el vector campo eléctrico en los puntos de la superficie gaussiana para calcular el flujo aplicando la definición:



Como la superficie es una superficie esférica la hemos dividido en “baldositas” muy, muy pequeñas, que por esa razón se denotan $d\vec{s}$, esta simbología es muy importante matemáticamente y se refiere a cuando una

magnitud tiene un valor que tiende a cero. Dibujados el vector campo eléctrico y el vector diferencial de superficie calculamos, el “flujito” muy pequeño (porque la superficie es también muy pequeña, como ya hemos dicho) que también será un diferencial, diferencial de flujo:

$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot ds \cdot \cos 0 = E \cdot ds \rightarrow$$

$$\phi = \sum d\phi = \int E ds = E \int ds$$

Donde E ha salido de la integral porque vale lo mismo en todos los puntos de la esfera verde, gaussiana, a la que le estamos aplicando el teorema (existe lo que se dice una “simetría esférica” puesto que los distintos puntos de ella son “indistinguibles”). Por otro lado, la última integral, $\int ds$, es la suma de la superficie de todas las baldositas en las que hemos dividido la superficie de la esfera. Por lo tanto, será la superficie total de la esfera verde $S = 4\pi r^2$. Entonces, nos queda:

$$\phi_{def} = E \int ds = ES \rightarrow \phi = E \cdot 4\pi r^2 \quad (1)$$

3º Se calcula el flujo aplicando el teorema de Gauss que sabemos es igual a la carga interior a la superficie gaussiana verde entre la permitividad. Para ello es necesario que sepamos la densidad de carga eléctrica en la esfera roja para así calcular la que encierra la esfera verde, multiplicando dicha densidad por su volumen. La densidad la denotamos por ρ y creemos que es sencillo ver que la podemos calcular dividiendo la carga total de la esfera roja, que la conocemos, entre su volumen. Por lo tanto:

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3Q}{4\pi R^3} \text{ C/m}^3$$

Y aplicando el teorema:

$$\phi_{Gauss} = \frac{q_{interior}}{\epsilon} = \frac{\rho \cdot V_{verde}}{\epsilon} = \frac{\frac{3Q}{4\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon R^3} \cdot r^3 \quad (2)$$

El cuarto, y último paso, consiste en igualar los dos flujos, el flujo calculado por la definición y el flujo calculado por Gauss, las fórmulas (1) y (2)

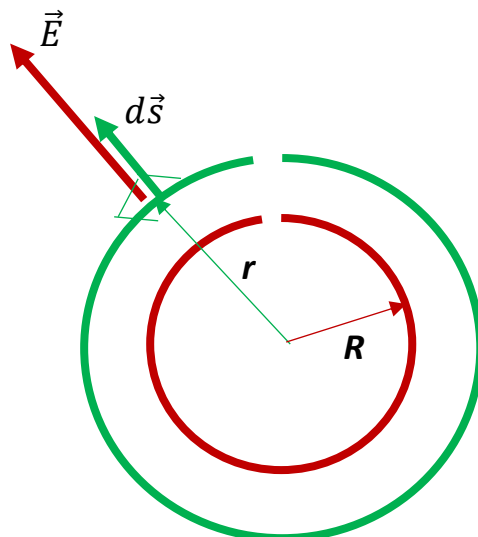
$$\phi_{def} = \phi_{Gauss} \rightarrow E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon R^3} r^3 \rightarrow$$

Despejando E y simplificando

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^3} \cdot r$$

De dirección radial y sentido hacia afuera. Observamos que en el centro el campo eléctrico es cero. Insistimos que este problema es muy poco probable que se ponga en un examen de 2º de bachiller. Se ha hecho por dos razones, la primera porque está en el programa y la segunda, más importante creemos, para alumnos y alumnas que tengan “más interés” de lo normal en la asignatura.

Vamos a finalizar calculando el campo creado por esta distribución de carga en puntos de su exterior, con $r > R$. Este caso, como vamos a ver, es más sencillo. Las pautas a seguir son exactamente iguales así que no repetimos el porqué



2º Calculamos el flujo aplicando la definición

$$\Phi_{def} = \int \vec{E} \cdot \vec{ds} = \int E \cdot ds \cdot \cos 0 = E \int ds = E \cdot 4\pi r^2$$

3º Calculamos el flujo por Gauss

$$\Phi_{Gauss} = \frac{q_{int}}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon}$$

Dado que ahora, y es por lo que decimos que este caso es más fácil que el anterior, **la carga interior a la bola verde NO depende de su radio puesto que es la carga total de la bola roja.**

E igualando ambos flujos:

$$\Phi_{def} = \Phi_{Gauss} \rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon} \rightarrow$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

De dirección radial hacia “afuera”. Observando la ley a la que hemos llegado, debemos de ver que este campo creado por la bola fuera de ella coincide con el que produciría una carga puntual del mismo valor y situada en su centro, algo que nos permite decir también que por fuera de ella el potencial es el mismo que el creado por una carga puntual situada en su centro.