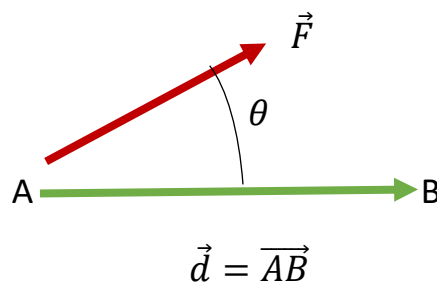


TEOREMA DEL TRABAJO

Vamos a deducir el teorema del trabajo cuando hay fuerzas eléctricas (aunque su expresión es general). Se podrá aplicar cuando además de otras, haya también fuerzas gravitatorias sin más que añadir la energía potencial gravitatoria de la que hablamos en el tema de gravitación).

Comenzamos con el primer teorema de la energía que damos sin demostración. **Este teorema nos dice que el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo cuando este se traslada entre dos puntos A y B se invierte en incrementar la energía cinética.** Aunque aquí recordemos ambos conceptos, el del trabajo de una fuerza y el de la energía cinética, recomendamos estudiarlos en los documentos dedicados a ellos en “física 1º de bachiller”.

Trabajo de una fuerza en un desplazamiento:



$$W_{\vec{F}A}^B = \vec{F} \cdot \vec{d} = F \cdot d \cdot \cos\theta$$

Aunque en los problemas el trabajo de una fuerza lo denotemos solamente con la letra W porque estará claro a qué fuerza nos referimos y cuál es su desplazamiento, en la definición anterior hemos puesto $W_{\vec{F}A}^B$ porque queremos dejar claro que el trabajo se refiere a una fuerza en un desplazamiento.

Respecto a **la energía cinética**, hemos de saber que es la energía que posee un cuerpo por estar moviéndose y su fórmula es

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

El primer teorema del trabajo, como hemos escrito al principio, se expresa matemáticamente así:

$$\sum W_{\vec{F} A}^B = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Cuyo significado es, insistimos, que **la suma de los trabajos de todas las fuerzas que actúan cuando el cuerpo, la carga en nuestro caso, se traslada entre el punto A y el punto B, se invierte en incrementar la energía cinética del cuerpo.**

Pero el trabajo de todas las fuerzas lo podemos poner como suma de los trabajos de las fuerzas conservativas, W_C , más el trabajo de las fuerzas NO conservativas, W_{NC} :

$$W_C + W_{NC} = \Delta E_c$$

Y recordando que **el trabajo de una fuerza conservativa es igual a la variación de la energía potencial cambiado de signo**, tenemos:

$$-\Delta E_P + W_{NC} = \Delta E_c \rightarrow W_{NC} = \Delta E_P + \Delta E_c$$

Por último, si definimos como **energía mecánica a la suma de la energía cinética más las energías potenciales**, nos queda:

$W_{NC} = \Delta E_m$

Teorema mucho más cómodo que el del que proviene y que hemos llamado primer teorema de la energía. Este “segundo” teorema nos dice que **el trabajo de las fuerzas NO CONSERVATIVAS se invierte en incrementar la energía MECÁNICA del cuerpo.**

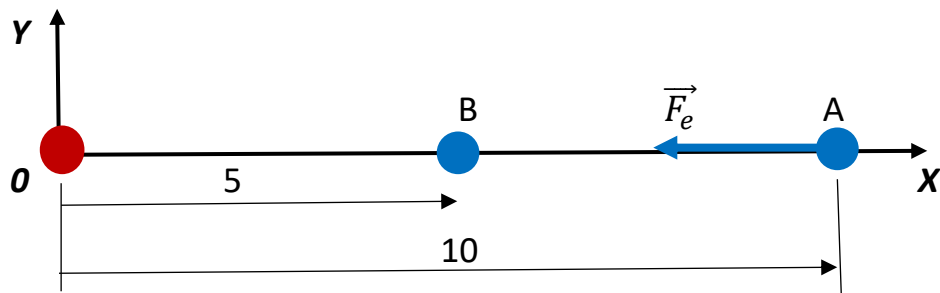
En general, **el teorema del trabajo se utiliza para relacionar dos posiciones del cuerpo, en esta parte carga eléctrica, con las velocidades que tiene en esas posiciones**

Como siempre, pensamos que un ejemplo clarifica enormemente la teoría:

Ejemplo

Sea una carga fija $Q=5\text{ C}$ en el origen de coordenadas y una carga $q=-6\text{ C}$ y masa 2 g en el punto $A(10,0)$. Calcular la velocidad de la carga $q=-6\text{ C}$ en el punto $B(5,0)$ cuando, partiendo del reposo del punto A , se deja libremente moverse bajo la atracción de la carga fija $Q=5\text{ C}$. Las coordenadas están en el SI

Dibujamos la situación y nos familiarizamos con el problema:



La carga positiva fija del origen atrae a la carga negativa y por lo tanto esta última “caerá” bajo el efecto de esa atracción y llegará al punto B con cierta velocidad que nos preguntan. Entonces, entendiendo la situación, pasamos a aplicar el teorema del trabajo que, como se ha dicho e insistimos, nos va a relacionar esas dos posiciones conocidas con sus velocidades.

$$W_{NC} = \Delta E_m$$

Y calculamos cada miembro de esa ecuación por separado:

$W_{NC} = 0$ Puesto que sobre la carga móvil sólo actúa la fuerza eléctrica que le produce la carga positiva del origen y, como sabemos, **la fuerza eléctrica es conservativa**. Por lo tanto, como no actúan fuerzas NO conservativas, su trabajo es cero. Ahora calculamos la variación de energía

$$\Delta E_M = \begin{cases} Em_A = qV(A) \\ Em_B = qV(B) + \frac{1}{2}mv_B^2 \end{cases}$$

La energía cinética en **A** es cero pues la carga q está parada. Para calcular su energía potencial eléctrica tenemos que calcular los potenciales eléctricos en los puntos **A y B** creados por las cargas fijas, en este caso la

carga positiva del origen. Aplicando la fórmula del potencial creado por una carga puntual tenemos

$$V(A) = k \frac{Q}{r_A} = 9 \cdot 10^9 \frac{5}{10} = 4.5 \cdot 10^9 \text{ V}$$

$$V(B) = k \frac{Q}{r_B} = 9 \cdot 10^9 \frac{5}{5} = 9 \cdot 10^9 \text{ V}$$

Por lo tanto, la variación de energía mecánica nos queda:

$$\Delta E_M = \begin{cases} Em_A = qV(A) = -6 \cdot 4.5 \cdot 10^9 \text{ J} \\ Em_B = qV(B) + \frac{1}{2}mv_B^2 = -6 \cdot 9 \cdot 10^9 + \frac{1}{2}2 \cdot 10^{-3}v_b^2 \text{ J} \end{cases}$$

Y aplicando el teorema:

$$W_{NC} = \Delta Em = Em_B - Em_A \rightarrow$$

$$0 = -54 \cdot 10^9 + 10^{-3}v_b^2 - (-6 \cdot 4.5 \cdot 10^9) \rightarrow$$

$$10^{-3}v_b^2 = 54 \cdot 10^9 - 27 \cdot 10^9 = 27 \cdot 10^9 \rightarrow$$

$$v_B^2 = 27 \cdot 10^{12} \rightarrow v_B = \sqrt{27 \cdot 10^{12}} = 3\sqrt{3} \cdot 10^6 \text{ m/s}$$