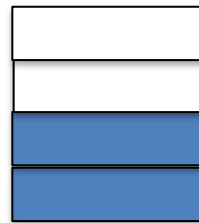
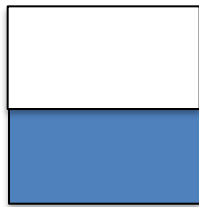


LAS 4 OPERACIONES CON FRACCIONES

Antes de aprender a sumar y a restar fracciones, hemos de tener en cuenta una **propiedad fundamental de las fracciones**.

Veámosla con un ejemplo:

Imaginemos que tenemos un depósito de agua. Si lo dividimos en dos partes iguales, tanto la parte superior como la inferior contienen la mitad del agua. Pero si lo dividimos en cuatro partes iguales y cogemos dos de ellas, el volumen de agua es el mismo como se observa en las figuras.



Podemos decir entonces que:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \dots = \frac{1 \cdot n}{2 \cdot n}$$

Y se dice que todas esas fracciones son equivalentes. Resumiendo, una fracción es equivalente a cualquiera que resulte de multiplicar su numerador y denominador por el mismo número.

Y también al revés, podemos dividir numerador y denominador por el mismo número y la fracción es la misma. Por ello, si

podemos dividir los dos términos por el mismo número, llegaremos a la más “pequeña” o irreducible. En nuestro caso:

$$\frac{8}{16} = \frac{8:2}{16:2} = \frac{4}{8} = \frac{4:2}{8:2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Decimos que la última fracción es la irreducible y equivalente de todas las anteriores. Visto esto, ya estamos en condiciones de aprender a sumar y a restar.

1. Suma y Resta

Regla:

Si tienen el mismo denominador, se operan solo los numeradores.
Si tienen distinto denominador, se debe calcular primero el m.c.m. de los denominadores.

Ejemplo: Suma y Resta

1) Mismo denominador:

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{3+4}{5} = \frac{7}{5}$$

Ya que sumar ***tres “algos” más cuatro “algos” son siete “algos”***.

En nuestro caso, ese “algo” eran quintos por lo que tres quinto más cuatro quintos podemos asegurar que son siete quintos

2) Distinto denominador:

$$\frac{1}{4} + \frac{5}{6}$$

Primero calculamos el m.c.m. de los denominadores, 4 y 6 como se ha visto en la pizarra anterior:

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ & 2 \\ & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ & 3 \\ & 1 \end{array}$$

$$4 = 2^2 \quad 6 = 2 \cdot 3 \rightarrow mcm(4,6) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

Entonces, podemos poner el mismo denominador a las dos fracciones porque **12** es múltiplo del denominador de la primera fracción, **12= 4x3**, y también es múltiplo del denominador de la segunda fracción, **12=6x2**. Por ello, si en la primera fracción multiplicamos numerador y denominador por **3** y en la segunda fracción hacemos lo mismo, pero por **2**, nos queda:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot \mathbf{3}}{4 \cdot \mathbf{3}} \\ \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot \mathbf{2}}{6 \cdot \mathbf{2}} \end{array}$$

Por lo que:

$$\frac{1}{4} + \frac{5}{6} = \frac{3}{12} + \frac{10}{12} = \frac{13}{12}$$

La resta igual, pero restando los numeradores:

$$\frac{1}{4} - \frac{5}{6} = \frac{3}{12} - \frac{10}{12} = \frac{3 - 10}{12} = \frac{-7}{12}$$

2. Multiplicación y División

(Producto y Cociente)

Operaciones directas que no requieren igualar los denominadores.

Regla Multiplicación:

Se multiplica en línea (numerador $\times$ numerador y denominador $\times$ denominador).

Regla División:

Se multiplica en cruz (numerador 1 $\times$ denominador 2, y viceversa).

Ejemplo: Multiplicación y División

1) Multiplicación (en línea):

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 7} = \frac{12}{35}$$

2) División (en cruz):

$$\frac{3}{5} \div \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 4} = \frac{21}{20}$$

También:

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 4} = \frac{21}{20}$$

Donde en el numerador aparece el producto de los extremos de la “torre” y en el denominador el producto de los medios.

Simplificar el resultado y darlo como fracción irreducible si se puede. En nuestro caso no se puede, no tienen divisor común y se dice que ambos números, denominador y numerador, son primos entre sí.

EJEMPLO INTEGRADO (OPERACIONES COMBINADAS)

Operación para resolver:

$$1/2 + (2/3 \times 1/4)$$

Paso 1: Jerarquía de operaciones

Los signos “más” y “menos” nos separan la expresión en distintos “vagones” que hay que operar primero:

$$2/3 \times 1/4 = 2/12 \text{ (Simplificado: } 1/6\text{)}$$

Paso 2: Suma (Comunes al mínimo denominador)

La operación queda: $1/2 + 1/6$

$$\text{m.c.m. (2, 6) = 6}$$

Paso 3: Resultado final

$$3/6 + 1/6 = 4/6$$

Simplificando: $2/3$

Por último, hacemos otro ejemplo de “operaciones combinadas”

$$\frac{1}{3} + 4 \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{13}{15} \right) - \left(\frac{3}{8} \div \frac{2}{9} \right)$$

Hemos de ver tres “vagones” separados por el primer signo “más” y el segundo signo “menos”, señalados en rojo. Calculamos cada uno de ellos.

El primero ya es una fracción irreducible, así que la dejamos.

Vamos con el segundo:

$$4 \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{13}{15} \right) = 4 \cdot \left(\frac{9}{15} - \frac{13}{15} \right) = 4 \cdot \left(\frac{-4}{15} \right) = \frac{4}{1} \cdot \left(\frac{-4}{15} \right)$$
$$\frac{4 \cdot (-4)}{1 \cdot 15} = \frac{-16}{15}$$

Y ahora, el tercer “vagón”

$$\frac{3}{8} \div \frac{2}{9} = \frac{27}{16}$$

Y sustituyendo en la expresión inicial:

$$\frac{1}{3} + 4 \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{13}{15} \right) - \left(\frac{3}{8} \div \frac{2}{9} \right)$$

$$= \frac{1}{3} + \left(-\frac{16}{15}\right) - \frac{27}{16} = \frac{1}{3} - \frac{16}{15} - \frac{27}{16}$$

Donde se ha tenido en cuenta una regla fundamental que nos dice que para quitar un paréntesis que tiene delante un signo “más” se deja lo de dentro como igual. Ahora tenemos que encontrar el mcm de los denominadores. Descomponiendo, tenemos:

$$\begin{aligned} 3 &= 3 \\ 15 &= 3 \cdot 5 \rightarrow mcm = 3 \cdot 5 \cdot 2^4 = 240 \rightarrow \\ 16 &= 2^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{1 \cdot 5 \cdot 2^4}{3 \cdot 5 \cdot 2^4} = \frac{80}{240} \\ \frac{16}{15} &= \frac{16}{3 \cdot 5} = \frac{16 \cdot 2^4}{3 \cdot 5 \cdot 2^4} = \frac{256}{240} \\ \frac{27}{16} &= \frac{27}{2^4} = \frac{27 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 2^4} = \frac{405}{240} \end{aligned}$$

Entonces, sustituyendo en la expresión última:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} - \frac{16}{15} - \frac{27}{16} &= \frac{80}{240} - \frac{256}{240} - \frac{405}{240} = \frac{80 - 256 - 405}{240} = \\ &= \frac{-581}{240} = -\frac{581}{240} \end{aligned}$$

Que no parece que se pueda simplificar y, además, lo importante ya está dicho.