

Ejercicio 1

La presión arterial de una muestra de adolescentes sigue una distribución normal de media 120 mm de mercurio y doce de desviación típica. Si se elige a un adolescente al azar halla:

a) La probabilidad de que su presión arterial mayor que 132 mm Hg

b) De que esté entre 96 y 144

Se dispone de la tabla de la distribución normal.

Ambas preguntas se responden fácilmente utilizando la distribución normal. Contestamos a la primera pregunta.

a)

$$\begin{aligned} N_x(\bar{x} = 120 \sigma = 12) &\rightarrow P(x \geq 132) = 1 - P(x \leq 132) = \\ 1 - P\left(z \leq \frac{132 - 120}{12}\right) &= 1 - P(z \leq 1) = |tabla| = 1 - 0.8413 \\ P(x \geq 132) &= \mathbf{0.1587} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(96 \leq x \leq 144) &= P\left(\frac{96 - 120}{12} \leq z \leq \frac{144 - 120}{12}\right) = P(-2 \leq z \leq 2) \\ P(z \leq 2) - P(z \leq -2) &= P(z \leq 2) - (1 - P(z \leq 2)) = 2P(z \leq 2) - 1 \\ &= |tabla| = 2 \cdot 0.9772 - 1 = \mathbf{0.9544} \end{aligned}$$

Ejercicio 2

Estudia la posible dependencia de los sucesos A y B en los siguientes casos:

A y B son incompatibles y de probabilidad no nula

B está incluido en A y su probabilidad no es nula

Si **A** y **B** son incompatibles la probabilidad de la intersección es cero. Por lo tanto:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0 \neq P(A)$$

Son, por lo tanto, dependientes pues la probabilidad de que se dé **A** cambia claramente sabiendo que ha ocurrido B, es el suceso imposible como vemos.

En el segundo caso, si **B** está incluido en **A**:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \neq P(A)$$

Y, al igual que en el caso anterior, son sucesos dependientes puesto que la probabilidad de que se dé el suceso **A** es uno, la del suceso seguro. Esto es claro puesto que el suceso **B** está incluido en el suceso **A**, por lo que si se da **B** se da **A** con toda seguridad.

Ejercicio 3

En una Comunidad Autónoma tres de cada cinco alumnos de segundo de bachillerato están matriculados en la asignatura de matemáticas II. Se eligen 6 alumnos al azar de entre todos los alumnos de segundo de bachillerato se pide:

- a) (075 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos estén matriculados en matemáticas dos.**
- b) (075 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos esté matriculado en matemáticas dos.**

c) (1 punto) Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 alumnos, calcular, aproximando la distribución binomial mediante una distribución normal, la probabilidad de que más de 60 de estos alumnos estén matriculados en matemáticas II.

a)

Se trata de una distribución binomial formada por dos sucesos incompatibles: el alumno está matriculado en matemáticas II, con una probabilidad de **3/5**, o no lo está, con una probabilidad de **2/5**. Tomando como éxito el hecho de que esté matriculado en matemáticas II, tenemos:

$$B\left(6, \frac{3}{5}\right)$$
$$P(X = 4) = \binom{6}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^4 \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

b)

Como ya hemos comentado en algún otro ejercicio, el suceso alguno, formado por varios, es el complementario del suceso ninguno, mucho más fácil de calcular. Por lo tanto:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{6}{0} \left(\frac{3}{5}\right)^0 \left(\frac{2}{5}\right)^6$$

c)

Como debemos de recordar, una binomial se puede aproximar a un normal si

$$n \cdot p \geq 5 \text{ y } n \cdot q \geq 5$$

Algo que se cumple en nuestro caso (además de que si no se cumplen esas condiciones nunca nos harían esa pregunta). Entonces se sabe que:

$$B(n, p) \rightarrow N(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot q})$$

En nuestro caso:

$$B\left(120, \frac{3}{5}\right) \rightarrow N\left(120 \cdot \frac{3}{5}, \sqrt{120 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}}\right) = N(72, 5.37)$$

Contestando a la pregunta:

$$\begin{aligned} P(X > 60) &= P(X_1 \geq 60.5) = 1 - P(X_1 \leq 60.5) \\ &= 1 - P\left(Z \leq \frac{60.5 - 72}{5.37}\right) = 1 - P(Z \leq -2.14) = \\ &= 1 - [1 - P(Z \leq 2.14)] = P(Z \leq 2.14) = 0.9838 \end{aligned}$$

Ejercicio 4

Una empresa comercializa tres tipos de productos A, B y C. Cuatro de cada 7 productos son de tipo A, dos de cada siete productos son de tipo B y el resto lo son de tipo C. A la exportación se destina un 40% de los productos tipo A, un 60% de los productos tipo B y un 20% de los productos tipo C. Elegido un producto al azar se pide:

- a) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.**
- b) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto es destinado a la exportación.**

Resumimos los datos en el siguiente esquema:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{4}{7} & P(E/A) &= 0.4 \\ P(B) &= \frac{2}{7} & P(E/B) &= 0.6 \\ P(C) &= \frac{1}{7} & P(E/C) &= 0.2 \end{aligned}$$

a)

Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(E) = P(A)P(E/A) + P(B)P(E/B) + P(C)P(E/C) \rightarrow$$

$$P(E) = \frac{4}{7} \cdot 0.4 + \frac{2}{7} \cdot 0.6 + \frac{1}{7} \cdot 0.2 = \frac{3}{7} = \mathbf{0.428}$$

b)

Nos preguntan la probabilidad de que el producto sea del tipo **C** sabiendo que se va a exportar, $P(C/E)$. Como conocemos la condicionada cambiada de orden $P(E/C)$, utilizamos claramente el teorema de Bayes que nos relaciona ambas condicionadas:

$$P(C/E) = \frac{P(C)P(E/C)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{7} \cdot 0.2}{\frac{3}{7}} = \frac{0.2}{3} = \frac{1}{15} = \mathbf{0.067}$$

Ejercicio 5

Según el Instituto Nacional de Estadística, durante el último trimestre de 2020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de consejos de administración de las empresas que componen el Ibex-35 fue del 27,7%. Se reunieron 10 de estos consejeros.

- a) Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.**
- b) Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.**
- c) Determine, aproximando mediante una distribución normal, la probabilidad de que en un Congreso de 200 consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35% de representación femenina.**

Según los datos del enunciado, llamando **M** al suceso “ser mujer” y **H** al suceso “ser hombre” y siendo sucesos claramente incompatibles, tenemos:

$$P(M) = 0.277$$

$$P(H) = 0.723$$

Ahora, al elegir diez personas, tenemos que ver que se trata de una distribución binomial. Eligiendo como “éxito” el suceso “ser mujer”:

$$B(10, 0.277)$$

a)

$$P(x = 5) = \binom{10}{5} (0.277)^5 (0.723)^5$$

b)

La probabilidad de que haya al menos un hombre sería la suma de las probabilidades de que haya uno, dos.....diez. Son diez sucesos. El suceso contrario, “ningún hombre”, es sólo un suceso. Su probabilidad corresponde a que haya diez mujeres:

$$P(x = 10) = \binom{10}{10} 0.277^{10} 0.723^0 = 0.277^{10}$$

El suceso contrario, algún hombre, tendrá probabilidad:

$$P(x \neq 10) = 1 - 0.277^{10}$$

c)

Para aproximar la distribución a la normal, cuando n es muy grande, tenemos que saber:

$$B(n, p) \approx N(np, \sqrt{npq}) \text{ si } \begin{cases} n > 10 \\ n \cdot p > 5 \\ n \cdot q > 5 \end{cases}$$

En nuestro caso:

$$\begin{cases} n = 200 \\ n \cdot p = 200 \cdot 0.277 = 55.4 \\ n \cdot q = 200 \cdot 0.723 = 144.6 \end{cases}$$

Cumpléndose, por lo tanto, los requisitos para hacer la aproximación:

$$B(200, 0.277) \rightarrow N(200 \cdot 0.277, \sqrt{200 \cdot 0.277 \cdot 0.723}) = N(55.4, 6.33)$$

Ya estamos en condiciones de contestar a lo que nos preguntan:

$$\begin{aligned} \frac{35}{100} \cdot 200 = 70 &\rightarrow P(x > 70) = 1 - P(x < 70) = \\ &= 1 - P\left(z < \frac{70 - 55.4}{6.33}\right) = 1 - P(z < 2.30) = 1 - 0.9893 = \mathbf{0.01} \end{aligned}$$

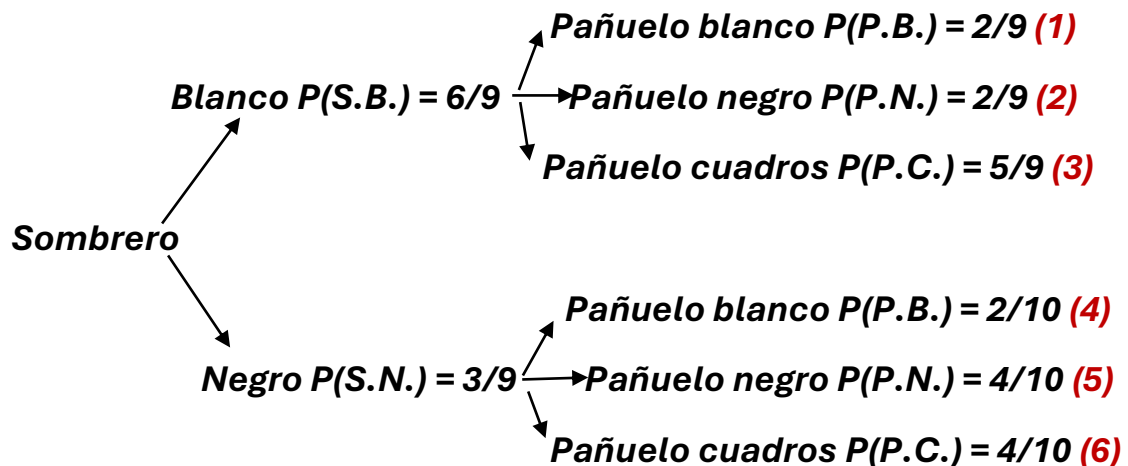
Ejercicio 6

De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco se toma al azar un pañuelo de un cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si sombrero es negro se elige al azar un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros blancos y negros. Se pide

- A) (1 punto) Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.**
B) (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los dos complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.
C) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.

a)

En estos problemas es muy visual el diagrama de árbol, aunque no necesario. Aquí lo vamos a hacer:



Los sucesos que cumplen la condición del enunciado de la pregunta son los sucesos **(2), (3), (4) y (6)**. Como debemos de saber, la probabilidad total de esos cuatro sucesos se calcula, atendiendo al árbol, multiplicando las probabilidades que aparecen en cada “rama” y sumando las de todas las ramas que satisfacen la condición.

Aplicando el teorema de la probabilidad total y llamando **A** al suceso en cuestión:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(S.B.) \cdot P(P.N./S.B.) + P(S.B.) \cdot P(P.C./S.B.) + \\ &+ P(S.N.) \cdot P(P.B./S.N.) + P(S.N.) \cdot P(P.C./S.N.) = \\ &\frac{6}{9} \cdot \frac{2}{9} + \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{10} + \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{10} = \frac{42}{81} + \frac{18}{90} \approx \mathbf{0.7581} \end{aligned}$$

Hubiera sido más corto el calcular la probabilidad del suceso complementario que está compuesto sólo por dos ramas. Nos hemos dado cuenta ahora, por lo que, como es conveniente, merece la pena mirar antes qué camino puede ser más corto, si el suceso que nos preguntan o su complementario. Sirva de ejemplo.

b)

Para contestar a la pregunta de cuál es la probabilidad de que aparezca algún complemento sea negro tendremos en cuenta lo que hemos dicho en el último párrafo de la pregunta anterior. Es mucho más corto el calcular la probabilidad de que no aparezca ninguno negro, que sólo es un caso, que el que aparezca alguno. Llamando **N** al suceso “aparece algún complemento negro”:

$$\begin{aligned} P(N) &= 1 - P(\overline{N}) = 1 - P(S.B.) \cdot P(P.B./S.N.) = 1 - \frac{6}{9} \cdot \frac{2}{9} = \\ &= \frac{69}{81} = \frac{\mathbf{23}}{\mathbf{27}} \end{aligned}$$

c)

Nos preguntan la probabilidad de que el sombrero haya sido negro si se sabe que el pañuelo ha salido de cuadros. Claramente sabemos la probabilidad de que el pañuelo salga de cuadros si el sombrero es negro, por lo que tenemos que cambiar la condicionada

de orden. Es para eso, sobre todo, para lo que utilizamos el teorema de Bayes:

$$P(S.N./P.C.) = \frac{P(S.N.)P(P.C./S.N.)}{P(P.C.)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{9}} = \frac{9}{34}$$