

Ejercicio 1

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro “a” y resolver en el caso de que sea compatible determinado y compatible indeterminado

$$\begin{cases} x + y + az = a \\ ax + ay + z = 1 \\ x + ay + z = a \end{cases}$$

El rango de la matriz de los coeficientes dependerá del valor de “a”. Como se ha visto en ellos ejemplos, ese rango dependerá según el valor determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = |1^a C \rightarrow 1^a C - 2^a C| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 1-a & a & 1 \end{vmatrix} =$$

Desarrollando por los adjuntos de la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 1-a & a & 1 \end{vmatrix} = (1-a) \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = (1-a)(1-a^2)$$

Si este determinante es nulo, el rango de la matriz de los coeficientes será menor que tres. Si es distinto de cero, el rango de la matriz será tres:

$$(1-a)(1-a^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} 1-a = 0 \rightarrow a = 1 \\ 1-a^2 = 0 \rightarrow a = \pm 1 \end{cases} \rightarrow a = \pm 1$$

Si

$$a \neq \pm 1 \rightarrow \text{ran} M = \text{ran} M^* = 3 = n^{\circ} \text{incog} \rightarrow \text{S.C.D}$$

Cuyas soluciones se calculan aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & a & 1 \end{vmatrix}}{(1-a)(1-a^2)}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}}{(1-a)(1-a^2)}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & a & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}}{(1-a)(1-a^2)}$$

En el caso de que $a = 1$ sustituimos ese valor en el sistema y calculamos los rangos aplicando Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pero, en este caso, no hace falta triangular porque todas las ecuaciones son iguales y podemos quitar la segunda y la tercera. Tenemos entonces un sistema de una ecuación con tres incógnitas. El rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada es uno. Como el número de incógnitas es tres, el sistema es compatible indeterminado con **$3 - 1 = 2$ parámetros**.

$$x + y + z = 1 \rightarrow \begin{cases} z = \gamma \\ y = \rho \\ x = 1 - y - z = 1 - \rho - \gamma \end{cases}$$

Y estas sus soluciones para cada par de valores de los parámetros.

En el caso de que $a = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{l} 2^a F \rightarrow 2^a F + 1^a F \\ 3^a F \rightarrow 3^a F - 1^a F \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Y se cumple

$$Rang M = Rang M^* = 2 < n^{\circ} incg = 3 \rightarrow S.C.I.$$

Número de parámetros = **$3 - 2 = 1$** . Elegimos la incógnita z como parámetro:

$$\begin{cases} z = \gamma \\ -2y + 2z = 0 \rightarrow y = z \rightarrow y = \gamma \\ x + y - z = -1 \rightarrow x = -1 - y + z \rightarrow x = -1 - \gamma + \gamma = -1 \end{cases}$$

Ejercicio 2

Determina los valores de los parámetros a , b y c para los que

$(x, y, z) = (1, 2, 3)$ son soluciones del sistema:

$$\begin{cases} 2ax + by + z = 3c \\ 3x - 2by - 2cz = a \\ 5ax - 2y + cz = -4b \end{cases}$$

Según nos dice el enunciado, los valores dados de $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ satisfacen el sistema de ecuaciones. Por lo tanto, sustituyendo dichos valores en el sistema obtenemos:

$$\begin{cases} 2a + 2b + 3 = 3c \\ 3 - 4b - 6c = a \\ 5a - 4 + 3c = -4b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a + 2b - 3c = -3 \\ -a - 4b - 6c = -3 \\ 5a + 4b + 3c = 4 \end{cases}$$

Resultando, como vemos, un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas en a , b y c . Resolvemos por Gauss dada su sencillez. La segunda ecuación la colocamos primera en la matriz, ya que tiene un -1 en la incógnita a , lo que nos facilita el “hacer” ceros y triangular:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 & -3 \\ 2 & 2 & -3 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \left| \begin{array}{l} 2^a F \rightarrow 2^a F + (1^a F) \times 2 \\ 3^a F \rightarrow 3^a F + (1^a F) \times 5 \end{array} \right| = \\ & \begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -15 & -9 \\ 0 & -16 & -27 & -11 \end{pmatrix} = |2^a F / (-3)| = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -16 & -27 & -11 \end{pmatrix} = \\ & = |3^a F \rightarrow 3^a F + (2^a F) \times 2| = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -17 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow -17c = -5 \rightarrow \\ & c = \frac{5}{17} \rightarrow |2^a F| \rightarrow 2b + 5\left(\frac{5}{17}\right) = 3 \rightarrow b = \dots \end{aligned}$$

No calculamos el valor de b , aunque se ha planteado la ecuación de donde se despeja, ni de a porque pensamos que no es necesario para alguien que se está preparando la EBAU.

Ejercicio 3

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro “a” y resuélvelo en el caso de que sea compatible.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + az = 8 \\ 2x - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$$

Como debemos de saber, la solución depende de los rangos de las matrices de los coeficientes y de la ampliada. Dado que hay un parámetro, para calcular el rango es mejor utilizar el método del determinante de mayor orden que se puede formar con la matriz. Lo que ocurre en este caso es que la matriz de los coeficientes **no es cuadrada** y contiene varios determinantes de tercer orden. Sin embargo, la matriz ampliada **sí es cuadrada**. Por lo tanto, vamos a calcular ese determinante de cuarto orden. Si es distinto de cero, el rango de la matriz ampliada tendrá rango cuatro y, dado que la matriz de los coeficientes no puede tener ese rango pues no contiene ningún determinante de cuarto orden, el sistema será incompatible.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & +2 & +a & 8 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & +1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2^a F \rightarrow 2^a F - 1^a F \\ 3^a F \rightarrow 3^a F + 2^a F \times (-2) \\ 4^a F \rightarrow 4^a F - 1^a F \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & +1 & 1 & 2 \\ 0 & +1 & a-1 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a-1 & 6 \\ -3 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (-3)(-2) \begin{vmatrix} 1 & a-1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

Donde se han hecho ceros en la primera columna y hemos después desarrollado por sus adjuntos. Después se ha sacado factor común de las filas donde era posible para simplificar lo posible. Podíamos seguir haciendo ceros para desarrollar por los adjuntos, pero también podemos aplicar Sarrus, ya que sólo hay un elemento del determinante que contiene el parámetro:

$$(-3)(-2) \begin{vmatrix} 1 & a-1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6[2 + a - 1 - (6 + 2a - 2)] = 6(-a - 3)$$

Este determinante será cero si:

$$-a - 3 = 0 \rightarrow a = -3$$

Por lo tanto, podemos decir:

$$\text{si } a \neq -3 \rightarrow \text{ran} M^* = 4 \neq \text{ran} M \leq 3 \rightarrow \text{SI}$$

De ser entonces compatible, sólo lo será en el caso de que

a = -3. Sustituimos entonces este valor y calculamos por Gauss los rangos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -15 & -15 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -15 & -15 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \end{pmatrix} \sim |4^a F \rightarrow 4^a F \times (15) + 3^a F \times (-8)| \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -15 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema es, como se ve, sistema compatible determinado puesto que el rango de las dos matrices es tres e igual al número de incógnitas. De la última ecuación:

$$-15z = -15 \rightarrow z = 1$$

Llevando ese valor de **z** a la segunda:

$$y - 4z = 6 \rightarrow y - 4 = 6 \rightarrow y = 10$$

Y sustituyendo en la primera esos valores:

$$x + 10 + 1 = 2 \rightarrow x = -9$$

Ejercicio 4

En una estantería de una biblioteca hay ensayos, novelas y biografías. Tres de cada dieciséis libros de la estantería son ensayos. Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas. Si retiramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarían 105 libros. Calcule el número de libros de cada clase que hay en la estantería.

Se trata de un resolver un sistema de ecuaciones, donde las incógnitas son lo que nos preguntan, el número de libros de cada clase. Llamando:

Número de ensayos: x

Número de novelas: y

Número de biografías: z

Primera condición. Tres de cada dieciséis libros son ensayos.

El número total de libros son

$$x + y + z \rightarrow \frac{3}{16}(x + y + z) = x \rightarrow -13x + 3y + 3z = 0$$

Segunda condición. Las biografías junto a la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas

$$z + \frac{1}{3}x = y + 2 \rightarrow x - 3y + 3z = 6$$

Tercera condición. Si retiramos la tercera parte de los ensayos y la quinta parte de las novelas, nos quedarían 105 libros. Entonces, el número de libros que quedan serían:

$$\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}y + z = 105 \rightarrow 10x + 12y + 15z = 1575$$

No creemos necesario resolver aquí este sistema muy simple de tres ecuaciones con tres incógnitas. La solución es: 24 ensayos, 55 novelas y 49 biografías.

Ejercicio 5

Dado el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro m :

$$\begin{aligned}x - 2my + z &= 1 \\mx + 2y - z &= -1 \\x - y + z &= 1\end{aligned}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores de m .

b) Resuelva el sistema para $m = -1/2$.

a)

Como debemos de saber, todo depende de los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada. Para calcular el rango de la matriz de los coeficientes utilizamos la propiedad que nos dice que el rango de una matriz coincide con el orden del mayor determinante que se puede formar con ella. Como la matriz de los coeficientes tiene sólo un determinante de tercer orden, sabremos que, si este determinante es distinto de cero, su rango será tres:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2m & 1 \\ m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - m + 2m - (2 + 1 - 2m^2) = 2m^2 + m - 1$$

Será cero si:

$$2m^2 + m - 1 = 0 \rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Podemos decir, entonces:

$$m \neq -1 \text{ y } m \neq \frac{1}{2} \rightarrow \text{ran}M = 3 = \text{rang}M' = n^{\circ} \text{ incóg} \rightarrow S.C.D$$

Y, ahora, estudiamos los dos casos cuando m toma esos valores:

$$m = -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{vmatrix} 2^a F \rightarrow 2^a F + 1^a F \\ 3^a F \rightarrow 3^a F - 1^a F \end{vmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 0 & 4 & 00 \\ 0 & -3 & 00 \end{pmatrix} \approx$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 0 & 4 & 00 \\ 0 & -3 & 00 \end{pmatrix} \approx |3^a F \rightarrow 2^a F \cdot (3) + 3^a F \cdot (4)| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 0 & 4 & 00 \\ 0 & 0 & 00 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 0 & 4 & 01 \end{pmatrix}$$

Vemos que el rango de la matriz de los coeficientes es dos, igual que el de la matriz ampliada pero menor que el número de incógnitas que es tres. Por lo tanto, aplicando el teorema de Roche-Frobenius, el sistema es compatible indeterminado. El número de parámetros es la diferencia entre el número de incógnitas y el rango, en este caso $3 - 2 = 1$. Pero si nos fijamos en el sistema, el valor de la incógnita y está determinado por la segunda ecuación:

$$4y = 1 \rightarrow y = \frac{1}{4}$$

Una vez calculada el valor de y , vamos a la primera ecuación:

$$x + 2y + z = 1 \rightarrow x + \frac{2}{4} + z = 1 \rightarrow \begin{cases} z = \lambda \\ x = 1 - \frac{1}{2} - z \rightarrow x = \frac{1}{2} - \lambda \end{cases}$$

Por lo que la solución, para $m = -1$, es:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \lambda \\ y = \frac{1}{4} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Ahora estudiamos el caso en el

$$m = \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{vmatrix} 2^a F \rightarrow 2^a F \cdot (-2) + 1^a F \\ 3^a F \rightarrow 3^a F - 1^a F \end{vmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 11 \\ 0 & -5 & 32 \\ 0 & 0 & 00 \end{pmatrix} \approx$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 11 \\ 0 & -5 & 32 \end{pmatrix}$$

Donde, como en el caso anterior y por la misma razón, el sistema es compatible indeterminado con un parámetro. Elegimos parámetro el valor de z :

$$\begin{cases} z = \lambda \\ 2^a F \rightarrow -5y + 3\lambda = 2 \rightarrow y = -\frac{2}{5} + \frac{3\lambda}{5} \\ 1^a F \rightarrow x = 1 + y - z = 1 + \left(-\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\lambda\right) - \lambda = \frac{3}{5} - \frac{2\lambda}{5} \end{cases}$$

b)

Nos preguntan la solución para $m = \frac{1}{2}$ que, como ya sabemos, corresponde a un valor para el que el sistema es compatible determinado.

Podemos sustituir y resolver el sistema triangulando la matriz por Gauss, no tiene más problema.

Ejercicio 6

Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia se van a repartir un premio de 9450 € de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en 3 años al doble de la edad de Alicia. Además, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio la diferencia entre lo que recibe Pablo y lo que recibe Alicia es de 420 €, deduzca y calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.

Es claramente, un problema de ecuaciones donde las incógnitas están claras desde el principio porque es lo que nos preguntan: las tres edades de los primos. Cuando sepamos estas y, dado que el dinero recibido por cada uno de ellos es proporcional a su edad, podremos conocer ese dinero recibido. Empezamos poniendo nombre a sus edades:

Pablo: x
Alejandro: y
Alicia: z

Y traducimos al lenguaje matemático el enunciado.

Primera condición:

La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia. Creemos que es fácil ver la ecuación que representa esta condición es

$$x + y = 2z + 3 \rightarrow x + y - 2z = 3$$

Segunda condición:

La suma de las edades es 45 años. La ecuación que refleja esa condición es

$$x + y + z = 45$$

Tercera condición:

La diferencia entre el dinero que recibe Pablo y lo que recibe Alicia es de **420** euros.

Esta condición no se refiere a las edades, sino al dinero recibido. Tenemos entonces un “pequeño problema”. Tenemos que relacionar el dinero con las edades. Como nos dicen que el dinero recibido es proporcional a su edad, se cumple:

Pablo: kx €
Alejandro: ky €
Alicia: kz €

Y sabemos que la suma es el dinero total repartido:

$$kx + ky + kz = 9450 \rightarrow k = \frac{9450}{x + y + z} = |x + y + z = 45| = \frac{9450}{45} \\ = 210$$

Por lo tanto, han recibido:

$$\begin{aligned} \text{Pablo: } kx &= 210 \cdot x \text{ €} \\ \text{Alejandro: } ky &= 210 \cdot y \text{ €} \\ \text{Alicia: } kz &= 210 \cdot z \text{ €} \end{aligned}$$

Y ya podemos reflejar la tercera condición, la diferencia entre el dinero recibido por Pablo y Alicia de 420 €:

$$210x - 210z = 420 \rightarrow x - z = 2$$

Planteadas las ecuaciones ya podemos resolver:

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 3 \\ x + y + z &= 45 \\ x - z &= 2 \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 45 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \approx \left| \begin{array}{l} 2^{\text{a}}F \rightarrow 2^{\text{a}}F - 1^{\text{a}}F \\ 3^{\text{a}}F \rightarrow 3^{\text{a}}F - 1^{\text{a}}F \end{array} \right| \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 42 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

De la segunda fila obtenemos:

$$3z = 42 \rightarrow z = 14 \rightarrow \begin{cases} 3^{\text{a}}F: -y + 14 = -1 \rightarrow y = 15 \\ 1^{\text{a}}F: x + 15 - 2 \cdot 14 = 3 \rightarrow x = 16 \end{cases}$$

Las edades son:

$$\begin{aligned} \text{Pablo: } &16 \text{ años} \\ \text{Alejandro: } &15 \text{ años} \\ \text{Alicia: } &14 \text{ años} \end{aligned}$$

Y el dinero recibido:

$$\begin{aligned} \text{Pablo: } &210 \cdot 16 = 3360 \text{ €} \\ \text{Alejandro: } &210 \cdot 15 = 3150 \text{ €} \\ \text{Alicia: } &210 \cdot 14 = 2940 \text{ €} \end{aligned}$$