

Problema 4 (campo gravitatorio. Campo. Trabajo)

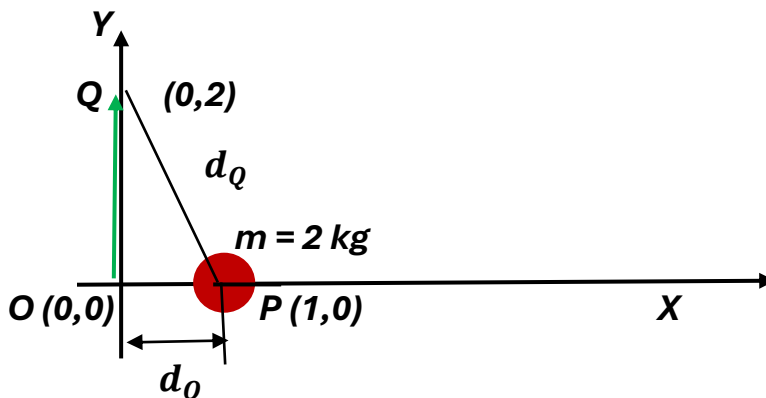
En el punto $(1,0)$ del plano XY se encuentra a una partícula A de masa $m_A = 2 \text{ kg}$. Se sabe que para llevar una partícula B de masa m_B desde el origen de coordenadas al punto $(0,2)$ m el trabajo realizado por la fuerza del campo gravitatorio creado por la masa m_A es $-2.95 \cdot 10^{-10} \text{ J}$.

Calcular:

- ¿Cuál es el valor de la masa m_B ?
- Calcule el valor del campo gravitatorio que crea la masa m_A en el punto $(0,2)$ m.

Dato: Constante de gravitación universal, $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$

Como siempre, una figura de la situación nos ayuda a visualizar el problema:



a)

Hemos de recordar que el trabajo de una fuerza conservativa es:

$$W_{c_O}^Q = - (E_{P_Q} - E_{P_O}) = -\Delta E_P$$

En nuestro caso:

$$W_{g_O}^Q = -\Delta E_P = -m_B (V(Q) - V(O)) \rightarrow$$

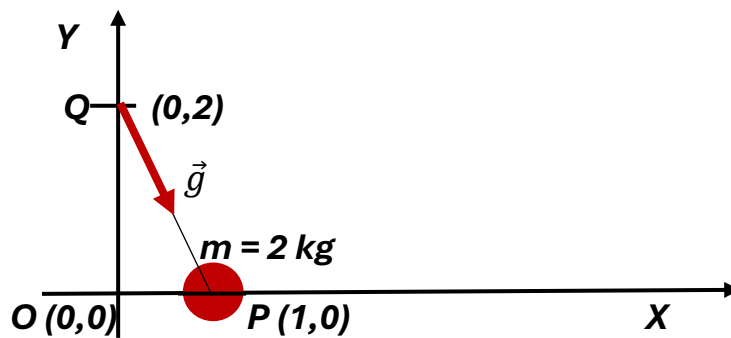
$$W_{g_O}^Q = -2.95 \cdot 10^{-10}$$

$$V(Q) = -G \frac{m_A}{d_Q} = -G \frac{2}{\sqrt{5}} \rightarrow -2.95 \cdot 10^{-10} = -m_B \left(-G \frac{2}{\sqrt{5}} + G \cdot 2 \right) \rightarrow$$

$$V(O) = -G \frac{m_A}{d_O} = -G \frac{2}{1}$$

$$m_B = \frac{2.95 \cdot 10^{-10}}{G \left(2 - \frac{2}{\sqrt{5}} \right)} = 4 \text{ kg}$$

b)



El vector $\overrightarrow{QP}$, que nos permitirá calcular el vector unitario en la dirección del campo gravitatorio pedido es:

$$\overrightarrow{QP} = (1 - 0, 0 - 2) = (1, -2) \rightarrow \begin{cases} |\overrightarrow{QP}| = \sqrt{5} \\ \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2) \end{cases}$$

El módulo del campo gravitatorio será, aplicando la definición:

$$g = G \frac{m_A}{|\overrightarrow{QP}|^2} = G \frac{2}{5} \rightarrow \vec{g} = g \cdot \vec{u} = G \frac{2}{5} \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)$$

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)$$

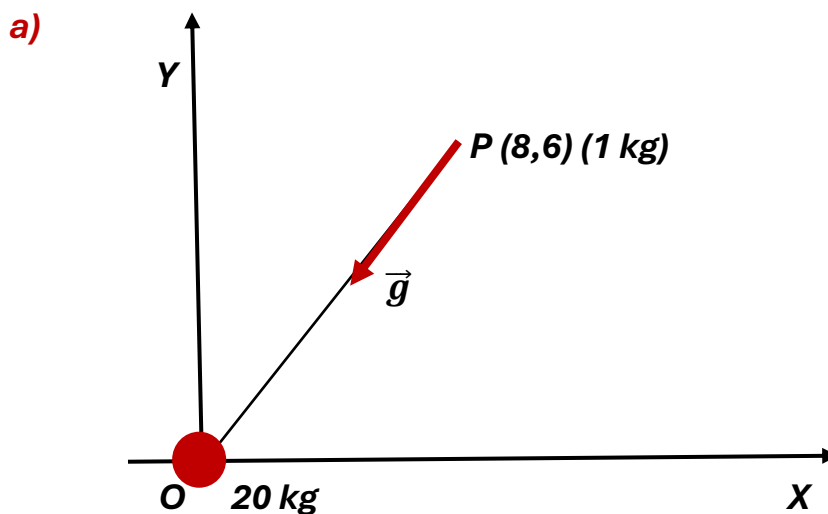
$$\vec{g} = G \frac{2}{5\sqrt{5}}(1, -2) \text{ N/kg}$$

Problema 5 (campo gravitatorio. Trabajo)

Una partícula de masa 20 kg permanece fija en el origen de coordenadas.

- a) Calcule el campo gravitatorio generada por la masa en el punto (8,6) y la fuerza que experimentará una segunda partícula de masa 3 kg situada en dicho punto.**
- b) Con el objetivo de alejar la segunda partícula se le transmite una velocidad de $1.2 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$ en la dirección de la recta que une ambas partículas. Halle el punto más alejado del origen que alcanzará dicha partícula.**

Datos: $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$



Como ya hemos hablado en la teoría, lo primero que hacemos es calcular el módulo del vector gravedad en ese punto aplicando la ley de gravitación de Newton. Para calcular la distancia entre el origen, donde está la masa de **20 kg**, calculamos el vector $\overrightarrow{PO}$ puesto que esa distancia será su módulo. Además, dicho vector nos permitirá calcular después el vector unitario en la dirección del vector gravedad, pues tiene su misma dirección y sentido:

$$\overrightarrow{PO} = (-8, -6) \rightarrow |\overrightarrow{PO}| = 10 \rightarrow g = G \frac{M}{d^2} = G \frac{20}{100} = G \frac{1}{5}$$

Para calcular el vector $\vec{g}$ debemos de conocer un vector unitario en su dirección y sentido, en la dirección y sentido del vector $\overrightarrow{PO}$:

$$\vec{u} = \frac{1}{|\overrightarrow{PO}|} \overrightarrow{PO} = \frac{1}{10} (-8, -6) = \left(\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5} \right) \rightarrow \vec{g} = g \cdot \vec{u} = G \frac{1}{5} \left(\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5} \right)$$

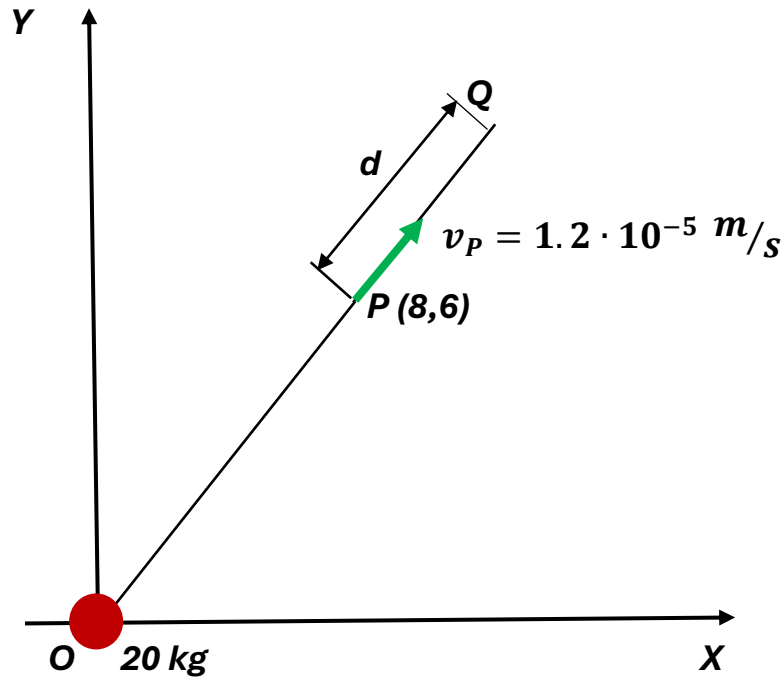
$$\vec{g} = -G \frac{4}{25} \vec{i} - G \frac{3}{25} \vec{j}$$

La fuerza sobre una masa puesta en ese punto será, como debemos de saber, el producto de la masa por la gravedad:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g} = 3 \cdot \left(-G \frac{4}{25} \vec{i} - G \frac{3}{25} \vec{j} \right) = -G \frac{12}{25} \vec{i} - G \frac{9}{25} \vec{j}$$

b)

Para responder hasta que distancia se separará la masa de 3 kg creemos que es fácil de intuir que utilizaremos el teorema del trabajo entre el punto inicial, **P**, conocido, y donde la velocidad de la partícula es también conocida, hasta el punto final, **Q**, de velocidad también conocida, nula, y de posición desconocida.



Teorema del trabajo:

$$W_{NC_P}^Q = E_m(Q) - E_m(P)$$

Y calculamos cada uno de los términos:

$$W_{NC_P}^Q = 0$$

$$E_m(Q) = E_p = -G \frac{20 \cdot 3}{10 + d}$$

$$E_m(P) = E_c + E_p = \frac{1}{2} 3 (1.2 \cdot 10^{-5})^2 - G \frac{20 \cdot 3}{10}$$

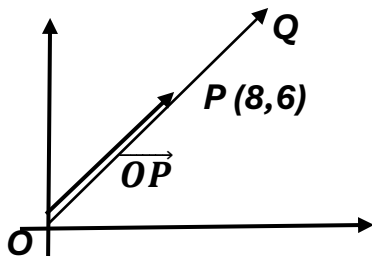
Donde el trabajo de las fuerzas no conservativas es nulo puesto que sobre la masa de 3 kg sólo actúa la gravedad, que es conservativa. Aplicando la ecuación que define el teorema:

$$0 = -G \frac{20 \cdot 3}{10 + d} - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1.44 \cdot 10^{-10} + G \cdot 6 \rightarrow$$

$$G \frac{60}{10 + d} = 6G - 2.16 \cdot 10^{-10} = 1.842 \cdot 10^{-10} \rightarrow$$

$$10 + d = \frac{60 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11}}{1.842 \cdot 10^{-10}} = 21.73 \rightarrow d = \mathbf{11.73\ m}$$

Ya hemos hecho lo “difícil” pero tenemos que contestar a lo que nos preguntan, el punto donde se para. Para ello, pensamos que es lo mejor, como hemos hecho a la hora de calcular el vector gravedad, calcular el vector unitario en la dirección de la trayectoria y después multiplicar por su módulo, **21.73** ya que a la distancia calculada hay que añadirle los **10 m** que hay desde el origen al punto **P**.



$$\overrightarrow{OP} = (8,6) \rightarrow |\overrightarrow{OP}| = 10 \rightarrow \vec{u} = \frac{1}{10}(8,6) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{OQ} = 21.73 \cdot \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \rightarrow Q = 21.73 \cdot \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$