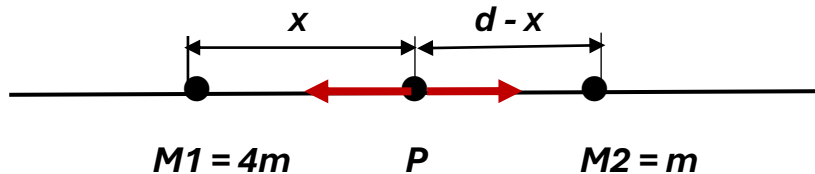


Problema 1 (campo gravitatorio. Campo)

Dos partículas de masas m y $4m$ están separadas una distancia d . Determine razonadamente en qué punto se ha de colocar una tercera partícula de masa m para que se encuentre en equilibrio.



Lo primero que hemos de ver es que el punto donde se pueden anular las dos fuerzas gravitatorias producidas por las dos masas tiene que estar en la recta que las une. Si estuviera por encima o debajo de dicha recta, las dos fuerzas gravitatorias serían vectores con distinta dirección y, por lo tanto, no se podrían anular.

El punto donde se podrán anular las dos fuerzas de atracción tiene que estar entre las dos masas. Si estuviera a la derecha de ambas las dos fuerzas de atracción irían hacia la izquierda y no se podrían anular. Algo similar ocurriría en puntos de la recta a la izquierda de ambas.

Decididas estas cuestiones, llamamos **P** al punto donde se anulan las dos fuerzas gravitatorias y definimos su posición, evidentemente desconocida, por la variable "**x**". Para calcular su valor, aplicamos que el módulo de ambas fuerzas ha de ser el mismo para que la resultante sea cero:

$$F_1 = G \frac{4m \cdot m}{x^2} \quad F_2 = G \frac{m \cdot m}{(d-x)^2} \rightarrow F_1 = F_2 \rightarrow G \frac{4m \cdot m}{x^2} = G \frac{m \cdot m}{(d-x)^2} \rightarrow$$

$$\frac{4}{x^2} = \frac{1}{(d-x)^2} \rightarrow 4 = \frac{x^2}{(d-x)^2} \rightarrow 2 = \frac{x}{d-x} \rightarrow 2d - 2x = x \rightarrow$$

$$x = \frac{2}{3}d$$

Donde para evitar resolver una ecuación de segundo grado, hemos sacado raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad recalcada en negrita. Además, hemos elegido el valor positivo de la raíz cuadrada de **4**, **+2**, puesto que las dos cantidades del quebrado a su derecha son positivas.

Problema 2 (campo gravitatorio. Campo y potencial)

Dos masas de 1 y 3 kg se encuentran situadas en los puntos

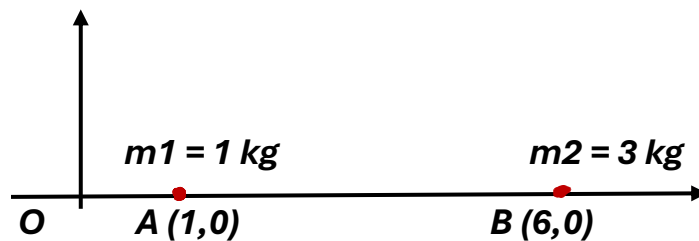
A (1,0) m y B (6,0) m, respectivamente. Calcule:

- a) El potencial gravitatorio en el origen de coordenadas.**
- b) El campo gravitatorio en el en el origen de coordenadas.**
- c) La fuerza gravitatoria que actuará sobre una partícula de 0.5 kg situada en el origen de coordenadas.**

Datos: constante universal de gravitación $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$

a)

Como siempre, hacemos un dibujo de la situación:



El potencial en un punto creado por varias masas viene dado por:

$$V(O) = \sum -G \frac{m_i}{d_i} = -G \frac{1}{1} - G \frac{3}{6} = G \frac{3}{2} \text{ J/kg}$$

b)

El campo gravitatorio en el origen es, como debemos de saber, la fuerza que en ese punto se ejerce a un kilogramo. En nuestro caso, creemos que es fácil ver, que las fuerzas gravitatorias que ejercen cada una de las dos masas en el origen sobre el kilogramo son horizontales y hacia la derecha. Calculando su módulo aplicando la ley de gravitación, y sumando vectorialmente, tenemos:

$$\vec{g}(0) = G \frac{1}{1^2} \vec{i} + G \frac{3}{6^2} \vec{i} = G \frac{13}{12} \vec{i} \text{ N/kg}$$

c)

Dado que el campo gravitatorio es la fuerza sobre la unidad de masa, la fuerza sobre otra masa es:

$$\vec{F} = m\vec{g} = 0.5 \cdot G \frac{13}{12} \vec{i} \text{ N}$$

Cuestión 1

Responda razonadamente a las siguientes preguntas:

- a) ¿Puede ser negativo el trabajo realizado por una fuerza gravitatoria?**
- b) ¿Puede ser negativa la energía potencial gravitatoria?**

- a) El trabajo de cualquier fuerza, conservativa o no, puede ser negativo si la fuerza tiene la componente sobre el desplazamiento en sentido contrario a este. También, recordando la definición de trabajo, este será negativo si el coseno del ángulo que forma la fuerza y el desplazamiento es negativo.
- b) Recordando la fórmula de la energía potencial gravitatoria, esta es siempre negativa. En todo caso, a pequeñas alturas sobre la superficie de un planeta, se puede hacer la

aproximación de que la energía potencial de una masa viene dada por $E_p = mgh$ y en estos casos puede ser positiva o negativa, según esté el cuerpo por encima o por debajo del nivel de altura cero que hallamos elegido respectivamente.

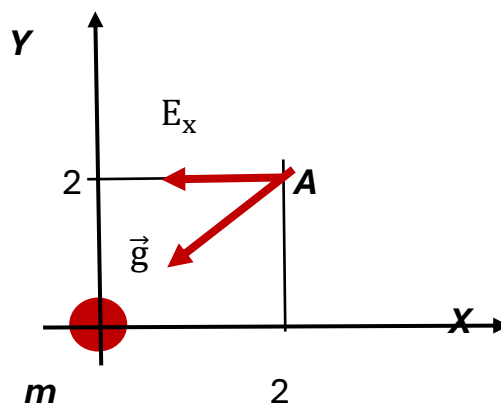
Problema 3 (campo gravitatorio. Campo. Trabajo)

Una partícula de masa m desconocida se encuentra en el origen de coordenadas. Sabiendo que la componente x del campo gravitatorio en el punto $A (2,2)$ m creada por dicha masa es $-1.18 \cdot 10^{-11} N \cdot kg^{-1}$ determine:

- a) El valor de la masa m .**
- b) El trabajo que realiza el campo gravitatorio para llevar una partícula de masa $M=5$ kg desde el punto $B (4,0)$ al punto $A (2,2)$**

Datos: constante de gravitación universal $G = 6.67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

a)



Como vemos en la figura, la distancia entre la masa m en el origen y el punto A es la diagonal del cuadrado de lado $L = 2$. El módulo del campo será entonces:

$$g = G \frac{m}{d^2} = \left| d = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \right| = G \frac{m}{8}$$

Su componente horizontal, claramente negativa, tiene de módulo:

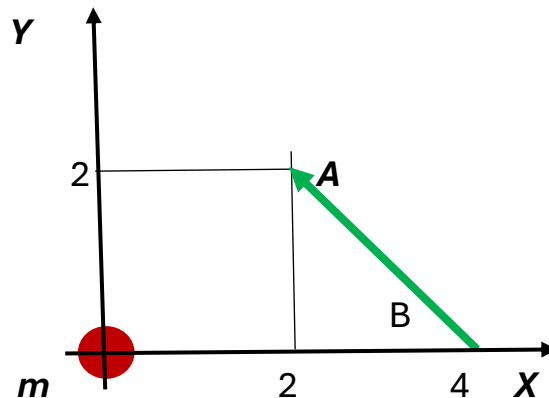
$$g_x = g \cos 45 = G \frac{m \sqrt{2}}{8 \cdot 2}$$

Por ser, al tratarse de un cuadrado, 45 grados el ángulo que forma el campo con la horizontal. Igualando la expresión anterior al dato del problema donde se nos dice cuánto vale esa componente:

$$G \frac{\sqrt{2}m}{16} = 1.18 \cdot 10^{-11} \rightarrow m = \frac{1.18 \cdot 10^{-11} \cdot 16}{G\sqrt{2}} \rightarrow$$

$$m = 2.02 \text{ kg}$$

b)



Como debemos de recordar, el trabajo que hace un campo conservativo cuando se traslada entre dos puntos una masa M es la variación de la energía potencial cambiada de signo.

$$W_c \uparrow_B^A = -\Delta E_p = -[M \cdot V(A) - M \cdot V(B)]$$

Para lo que necesitamos saber los potenciales en los puntos A y B creados por la masa m del origen. La energía potencial de la masa que se traslada, de 5 kg, en esos puntos, es el producto de su masa por el potencial.

$$\begin{aligned} V(A) &= -G \frac{2.02}{2\sqrt{2}} \\ V(B) &= -G \frac{2.02}{4} \end{aligned} \rightarrow W_c = - \left[5 \cdot \left(-G \frac{2.02}{2\sqrt{2}} \right) - 5 \left(-G \frac{2.02}{4} \right) \right] \rightarrow$$
$$W_c = 5G \cdot 2.02 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4} \right) = 1.04G \text{ J}$$

Trabajo positivo porque el campo va a favor del desplazamiento (la componente horizontal del campo es hacia la izquierda como el del desplazamiento).