

Problema 1

Un planeta B tiene la mitad de masa que otro planeta A y la velocidad de escape del planeta B es el triple que la de A. Deduzca la expresión de la velocidad de escape y determine razonadamente la relación entre los radios de ambos planetas.

La velocidad de escape se define como la *mínima velocidad* que debe tener en la superficie de un planeta una masa para que no vuelva a caer sobre él.

Físicamente, podemos decir que es la velocidad necesaria para que llegue al infinito (muy lejos, fuera del alcance de la gravedad del planeta) con velocidad nula (si llegara con velocidad distinta de cero, la velocidad calculada no sería la mínima necesaria y por lo tanto no sería la velocidad de escape). Por lo tanto, vamos a aplicar el teorema de la energía entre el estado inicial, en la superficie del planeta, y el estado final en el infinito a una masa cualquiera m que lanzamos desde la superficie:



$$W_{NC1}^2 = \Delta E_m = E_m(2) - E_m(1) \rightarrow$$

$$\begin{cases} W_{NC1}^2 = 0 \text{ (sólo actúa la gravedad)} \\ \Delta E_m = \begin{cases} E_m(2) = -G \frac{M_T}{\infty} m + \frac{1}{2} m 0^2 = 0 \\ E_m(1) = -G \frac{M_p}{R_p} m + \frac{1}{2} m v_e^2 \end{cases} \end{cases}$$

Y aplicando el teorema:

$$0 = 0 - \left(-G \frac{M_p}{R_p} m + \frac{1}{2} m v_e^2 \right) \rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM_p}{R_p}}$$

Aplicamos esta ley para responder a la segunda pregunta, la relación entre los radios de ambos planetas:

$$v_e^A = \sqrt{\frac{2GM_A}{R_A}} = \sqrt{\frac{2G \cdot 2M_B}{R_A}}$$

$$v_e^B = \sqrt{\frac{2GM_B}{R_B}}$$

Dividiendo ambas, y teniendo en cuenta que la velocidad de escape del planeta **B** es el triple que la del planeta **A**:

$$\frac{v_e^A}{v_e^B} = \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{\frac{2G \cdot 2M_B}{R_A}}}{\sqrt{\frac{2GM_B}{R_B}}} = \sqrt{\frac{2R_B}{R_A}} \rightarrow \frac{1}{9} = \frac{2R_B}{R_A} \rightarrow R_A = 18R_B$$

Problema 2

De un planeta se desconoce su masa, aunque se sabe que la gravedad en su superficie es la misma que en la superficie de la tierra y que su radio es un 80% del radio terrestre. Determine:

- a) la masa del planeta.**
- b) Calcule la velocidad de escape del planeta.**

Datos: $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ $M_T = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

$R_T = 6370 \text{ km}$

a)

Debemos de recordar que la gravedad en la superficie de un planeta, en módulo, viene dada por:

$$g_0 = G \frac{M_P}{R_P^2}$$

Aplicando esta expresión a la Tierra y al planeta:

$$g_0^T = G \frac{M_T}{R_T^2} = 9.8$$

$$g_0^P = G \frac{M_P}{R_P^2} = G \frac{M_P}{(0.8 \cdot R_T)^2} = 9.8 \rightarrow M_P = \frac{9.8 \cdot (0.8)^2 (6.37 \cdot 10^6)^2}{G} \rightarrow$$

$$M_P = 3.81 \cdot 10^{24} kg$$

b)

Conocida la masa del planeta y su radio, el cálculo de la velocidad de escape no tiene nada más que la aplicación de la fórmula dada un poco más arriba:

$$v_e = \sqrt{\frac{2G \cdot M_P}{R_P}} = \sqrt{\frac{2G \cdot 3.81 \cdot 10^{24}}{0.8 \cdot 6.37 \cdot 10^6}} \approx 9987 \text{ m/s}$$

Problema 3

Marte posee la décima parte de la masa de la tierra y la mitad de su diámetro.

- a) Encuentre la relación entre las velocidades de escape de marte y de la tierra desde sus respectivas superficies.**
- b) Suponga que un objeto se lanza verticalmente desde la superficie terrestre, con una velocidad igual a la velocidad de escape de Marte. Si se desprecia el rozamiento, ¿qué altura máxima alcanzaría el objeto?**

Dato radio de la Tierra, $R_T = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$.

a)

Debemos de saber que la velocidad de escape desde la superficie de un planeta es aquella que posee en la superficie que hace que llegue a una distancia infinita, “muy lejos”, con velocidad nula y sin aporte de energía exterior. Dado que entre el punto de la superficie desde donde se lanza y su posición final en el infinito no actúa nada más que la gravedad, podemos aplicar la conservación de la energía entre ambos puntos:

$$E_{m_1} = \frac{1}{2}mv_e^2 - G \frac{M_P \cdot m}{R_P} \rightarrow \frac{1}{2}mv_e^2 - G \frac{M_P \cdot m}{R_P} = 0 \rightarrow$$

$$E_{m_\infty} = \frac{1}{2}m0^2 - G \frac{M_P \cdot m}{\infty} = 0$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2G \cdot M_P}{R_P}}$$

Aplicando la fórmula a la Tierra y a Marte:

$$v_{eT} = \sqrt{\frac{2G \cdot M_T}{R_T}}$$

$$v_{eM} = \sqrt{\frac{2G \cdot M_M}{R_M}} = \sqrt{\frac{2G \cdot \frac{1}{10}M_T}{\frac{1}{2}R_T}} = \sqrt{\frac{1}{5} \cdot \frac{2G \cdot M_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot v_{eT}$$

b)

Dado que también la única fuerza que actúa sobre el cuerpo que se lanza es la de la gravedad, podemos aplicar la conservación de la energía entre el punto desde donde se lanza, en la superficie, y el punto a donde llega, a una distancia **D** del centro de la Tierra:

$$E_{m_S} = \frac{1}{2}m \left(\sqrt{\frac{1}{5} \cdot \frac{2G \cdot M_T}{R_T}} \right)^2 - G \frac{M_T \cdot m}{R_T} = \frac{1}{2}m \frac{1}{5} \cdot \frac{2G \cdot M_T}{R_T} - G \frac{M_T \cdot m}{R_T}$$

$$E_{m_D} = \frac{1}{2}m0^2 - G \frac{M_T \cdot m}{D} = -G \frac{M_T \cdot m}{D}$$

Igualando ambas energías:

$$m \frac{1}{5} \cdot \frac{G \cdot M_T}{R_T} - G \frac{M_T \cdot m}{R_T} = -G \frac{M_T \cdot m}{D} \rightarrow -\frac{4}{5}G \frac{M_T \cdot m}{R_T} = -G \frac{M_T \cdot m}{D} \rightarrow$$

$$\frac{4}{5R_T} = \frac{1}{D} \rightarrow D = \frac{5}{4}R_T$$

Para calcular la altura sobre la superficie, que es lo que nos preguntan, bastará con restarle a esta distancia el radio de la Tierra:

$$H = \frac{5}{4}R_T - R_T = \frac{1}{4}R_T = \frac{1}{4}6.37 \cdot 10^6 = \mathbf{1592500 \text{ m}}$$