

Problema 1

Una nave espacial se encuentra describiendo una órbita circular alrededor de un cierto planeta esférico. La velocidad orbital de la nave es de 25000 km/h y tarda 5 horas en dar una vuelta completa alrededor del planeta.

- a) Determinar el radio de la órbita que describe la nave y la masa del planeta.**
- b) Si el radio del planeta es 5900 km, calcular el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de dicho planeta.**

Dato constante de gravitación universal G .

a)

Una de las leyes fundamentales del movimiento orbital proviene de que la fuerza gravitatoria sobre la nave es la fuerza centrípeta que la hace permanecer en la órbita. Y dado que, por la ley de Newton, la fuerza centrípeta ha de ser igual a la masa del objeto por su aceleración centrípeta, tenemos:

$$G \frac{M_p \cdot m_n}{R_o^2} = m_n \frac{v^2}{R_o} \rightarrow GM_p = v^2 \cdot R_o \rightarrow \left| v = \omega \cdot R_o = \frac{2\pi}{T} R_o \right| \rightarrow$$

$$GM_p = \left(\frac{2\pi}{T} R_o \right)^2 R_o \rightarrow GM_p = 4\pi^2 \frac{R_o^3}{T^2}$$

Se ha subrayado la ley de partida, la relación entre la velocidad lineal y el periodo y el radio orbital, para llegar a la ley de Kepler que nos permitirá conocer, por último, la masa del planeta. Hay que recalcar que llamamos R_o al radio orbital, la distancia entre la nave y el centro del planeta, para diferenciarlo del radio del planeta R_p .

Con la relación entre la velocidad lineal, el periodo y el radio orbital calculamos este último:

$$v = \frac{2\pi}{T} R_o \rightarrow R_o = \frac{v \cdot T}{2\pi}$$

$$= \left| v = 25000 \frac{km}{h} = 25000 \frac{1000m}{3600s} = 6944.4 \frac{m}{s} \right| \rightarrow$$

$$T = 5 h = 5 \cdot 3600 s = 18000 s$$

$$R_o = \frac{6944.4 \cdot 18000}{2\pi} = \mathbf{19894240.6 m}$$

La masa del planeta:

$$GM_p = 4\pi^2 \frac{R_o^3}{T^2} \rightarrow M_p = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{R_o^3}{T^2} = \frac{4\pi^2}{6.67 \cdot 10^{-11}} \cdot \frac{(19894240.6)^3}{(18000)^2} \rightarrow$$

$$\mathbf{M_p = 1.44 \cdot 10^{25} kg}$$

b)

La aceleración de la gravedad en la superficie, que coincide con el valor del campo gravitatorio en la superficie, se calcula por ello así:

$$g_o = G \frac{M_p \cdot 1}{R_p^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{1.44 \cdot 10^{25}}{(5900 \cdot 1000)^2} = \mathbf{27.6 \frac{Nw}{kg} = \frac{m}{s^2}}$$

Problema 2

Dos satélites de igual masa m describen órbitas circulares de radios $R_1 > R_2$ alrededor de un cierto planeta. Determinar razonadamente cuál de los dos satélites tiene mayor energía mecánica.

Como debemos de saber, tenemos una fórmula muy cómoda para la energía total de un satélite en órbita. Sin embargo, siempre se recomienda deducirla si tenemos que utilizarla en un examen, como es el caso. La energía total será la suma de la cinética y la potencial:

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M_p m}{R_o} = \left| G \frac{M_p m}{R_o^2} = m \frac{v^2}{R_o} \rightarrow v^2 = G \frac{M_p}{R_o} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} m G \frac{M_p}{R_o} - G \frac{M_p m}{R_o} = -\frac{1}{2} G \frac{M_p m}{R_o}$$

De esta expresión es sencillo deducir qué satélite tiene mayor energía. El que tenga menor radio tendrá un valor absoluto mayor, pero, al ser la expresión siempre un número negativo, tendrá menor energía. Por lo tanto:

$$R_1 > R_2 \rightarrow Em_1 > Em_2$$

Problema 3

Encélado es un pequeño planeta de masa $m = 1.1 \cdot 10^{20} \text{ kg}$ y diámetro $D = 502 \text{ km}$ que gira alrededor de Saturno en órbita circular de radio $R = 238000 \text{ km}$.

- Calcular a el período orbital de Encélado alrededor de Saturno**
- Obtener el valor de la gravedad en la superficie de Encélado.**
- ¿Cuánto pesaría en Encélado una persona que en la tierra pesa 686 N ?**

Datos masa de Saturno $M_S = 5.7 \cdot 10^{26} \text{ kg}$, constante de gravitación universal $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$

a)

Partimos de la ley fundamental del movimiento planetario, la fuerza de atracción sobre el satélite es la fuerza centrípeta que produce su giro y, por la ley de Newton de la dinámica, ha de ser igual a la masa del satélite por su aceleración centrípeta:

$$G \frac{M_S \cdot m_E}{R_o^2} = m_E \omega^2 R_o \rightarrow G M_S = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R_o^3 \rightarrow$$

$$\frac{G M_S}{4\pi^2} = \frac{R_o^3}{T^2} \rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R_o^3}{G M_S}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 (2.38 \cdot 10^8)^3}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.7 \cdot 10^{26}}} = 118316 \text{ s}$$

b)

La gravedad, o campo gravitatorio, en un punto es la fuerza que en ese punto se ejerce a la unidad de masa, 1 kg. Dado que por fuera del planeta este se comporta como si toda su masa estuviera en el centro, la gravedad en su superficie vendrá dada:

$$g_s = G \frac{M_E}{R_E^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{1.1 \cdot 10^{20}}{\left(\frac{502}{2} \cdot 10^3\right)^2} = 0.12 \text{ N/kg}$$

c)

$$P_T = m \cdot g_t \rightarrow 686 = m \cdot 9.8 \rightarrow m = 70 \text{ kg}$$

Y, como debemos de saber, la masa es una constante del cuerpo. Por lo tanto, el peso en Encéfalo será:

$$P_E = m \cdot g_E = 70 \cdot 0.12 = 8.4 \text{ N}$$

Problema 4

El satélite Hispasat-4, de 3000 kg de masa, está en órbita geoestacionaria circular alrededor de la tierra.

- a) Calcular la altura sobre la superficie de la tierra a la que orbita este satélite.**
- b) Calcular el módulo de la velocidad lineal con que orbita este satélite.**
- c) Calcular la energía que es necesaria suministrar al satélite para colocarlo en dicha órbita.**

Datos: radio de la tierra, $R_T = 6.4 \cdot 10^3 \text{ km}$;

masa de la tierra $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$;

constante de gravitación universal

$$G = 6.7 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

a)

Hemos de saber que si el satélite es geoestacionario su periodo coincide con el de la rotación de la tierra alrededor de su eje, 24 horas. Utilizando la misma fórmula, deducida a partir de la fundamental en el ejercicio anterior, tenemos:

$$\frac{GM_T}{4\pi^2} = \frac{R_o^3}{T^2} \rightarrow R_o = \sqrt[3]{\frac{GM_T \cdot T^2}{4\pi^2}} = 42.361 \text{ km}$$

Este es el radio orbital, el que aparece en las leyes y el que calculamos o con el que trabajamos siempre. Para contestar a la pregunta, altura sobre la superficie terrestre, le restamos evidentemente el radio de la tierra:

$$h = R_o - R_t = 42.361 - 6.400 = \mathbf{35.961 \text{ km}}$$

b)

Dado que conocemos el periodo y el radio, es suficiente con aplicar las relaciones cinemáticas para calcular el módulo de la velocidad lineal del satélite en su órbita:

$$v = \omega \cdot R_o = \frac{2\pi}{T} \cdot R_o = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \cdot 42.361 \cdot 10^3 = \mathbf{3.080 \text{ m/s}}$$

c)

Para calcular energías utilizamos, como no podía ser de otra manera, el teorema del trabajo. En nuestro caso, relacionaremos por medio de él, la energía del satélite en la superficie de la tierra antes del lanzamiento y la energía del satélite en la órbita. Lo que nos preguntan es el trabajo de las fuerzas no conservativas, el trabajo de los motores.

$$W_{NC_S}^0 = E_{M_O} - E_{M_S} \rightarrow \left| \begin{array}{l} W_{NC_S}^0 = ? \\ E_{M_O} = -\frac{1}{2} G \frac{M_T \cdot m_S}{R_o} \\ E_{M_S} = -G \frac{M_T \cdot m_S}{R_T} \end{array} \right| \rightarrow$$

$$W_{NC_S}^0 = -\frac{1}{2} G \frac{M_T \cdot m_S}{R_o} + G \frac{M_T \cdot m_S}{R_T} = G \cdot M_T \cdot m_S \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2R_o} \right) \rightarrow$$

$$W_{NC_S}^0 = 6.7 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 3.000 \cdot \left(\frac{1}{6.4 \cdot 10^6} - \frac{1}{2 \cdot 4.2 \cdot 10^7} \right) \rightarrow$$

$$\mathbf{W_{NC_S}^0 = 1.7 \cdot 10^{11} J}$$

Donde se ha utilizado la fórmula que nos da la energía de un satélite en órbita deducida en la teoría. Recomendamos que esa deducción se haga en el examen. La energía antes del lanzamiento, en la superficie, es sólo la potencial gravitatoria en ese punto.