

**Problema 1 (campo gravitatorio. Movimiento orbital. Periodo)**

**Un planeta gira en torno a una estrella de masa igual a la mitad de la masa del Sol describiendo una órbita de radio igual a la mitad del radio orbital del planeta tierra alrededor del Sol. Discuta razonadamente cuál de los dos planetas tarda más tiempo en dar una vuelta completa en su correspondiente órbita.**

Deberíamos pensar fácilmente en la ley de Kepler que se refiere a la relación entre los radios y los periodos. Nos la podemos aprender de memoria, pero, aparte de que en nuestro caso no seamos muy amigos de ello, es muy fácil de deducir a partir de la ley fundamental que nos dice que la fuerza gravitatoria es la fuerza centrípeta y, por lo tanto, igual a la masa por la aceleración centrípeta. Este concepto sí que no lo podemos olvidar:

$$G \frac{M \cdot m}{R_o^2} = m\omega^2 R_o \rightarrow \left| \omega = \frac{2\pi}{T} \right| \rightarrow GM = \frac{4\pi^2}{T^2} R_o^3 \rightarrow$$

$$\frac{GM}{4\pi^2} = \frac{R_o^3}{T^2}$$

Donde **M** es la masa central respecto al cual órbita el satélite. Si aplicamos la ley al planeta del problema y a la tierra:

$$P: \frac{G \frac{M_{sol}}{2}}{4\pi^2} = \frac{\left(\frac{R_{OT}}{2}\right)^3}{T_p^2}$$

$$T: \frac{GM_{sol}}{4\pi^2} = \frac{R_{OT}^3}{T_T^2}$$

Donde se han tenido en cuenta los datos del problema sobre la masa de la estrella respecto a la cual orbita el planeta, la mitad que la del sol, y sobre su radio orbital, también la mitad que el de la tierra.

Dividiendo ambas expresiones se simplifican todos los términos excepto los periodos:

$$\frac{1}{2} = \frac{T_T^2}{8T_P^2} \rightarrow T_P^2 = \frac{1}{4}T_T^2 \rightarrow T_P = \frac{1}{2}T_T$$

### **Problema 2 (campo gravitatorio. Movimiento orbital)**

**Un satélite tarda cuatro horas en dar una vuelta completa alrededor de un planeta con una velocidad orbital de 5000 m/s. Calcule:**

- a) El radio de la órbita y la masa del planeta.**
- b) La velocidad de escape desde la órbita.**

**Datos: Constante universal  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{Kg}^{-2}$**

**a)**

Aplicando la ley fundamental del movimiento orbital:

$$G \frac{Mm}{R_o^2} = m \frac{v^2}{R_o} \rightarrow G \frac{M}{R_o} = v^2 \rightarrow G \frac{M}{R_o} = (5 \cdot 10^3)^2$$

$$= 25 \cdot 10^6 \text{ (1)}$$

Como vemos, en esta ecuación aparecen dos incógnitas, la masa del planeta central y el radio de la órbita. Pero sabemos la velocidad y el tiempo que le cuesta dar una vuelta. Pensamos entonces que no es difícil pensar que podemos calcular el radio orbital pues:

$$e = v \cdot t \rightarrow 2\pi R_o = v \cdot T \rightarrow 2\pi R_o = 5 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 3600 \rightarrow$$

$$\rightarrow R_o = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 3600}{2\pi} = \frac{3.6 \cdot 10^7}{\pi}$$

Conocido el radio orbital y sustituyendo en la ecuación **(1)**

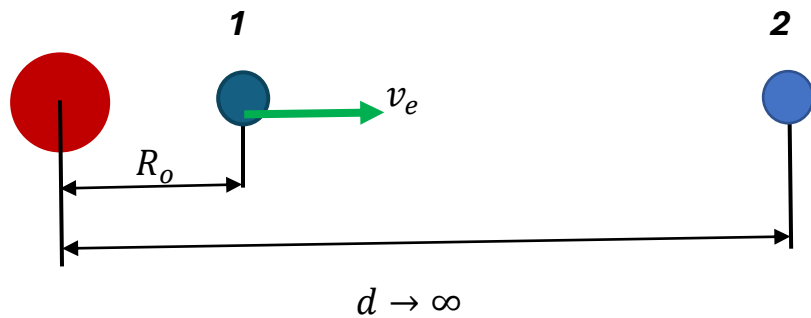
$$G \frac{M}{R_o} = 25 \cdot 10^6 \rightarrow G \frac{M}{\frac{3.6 \cdot 10^7 \pi}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \pi}} = 25 \cdot 10^6 \rightarrow M$$

$$= \frac{3.6 \cdot 25 \cdot 10^{13}}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \pi} \rightarrow$$

$$M \approx 4.29 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$$

**b)**

Nos preguntan la velocidad que hay que darle a una masa situada a esa distancia para que llegue “muy lejos” del astro central, al infinito, con velocidad nula. A esa velocidad se le llama velocidad de escape. Aplicando el teorema del trabajo entre ambos puntos, **1** y **2**:



$$W_{NC} = E_{m2} - E_{m1} \rightarrow \begin{cases} W_{NC} = 0 \\ E_{m2} = -G \frac{Mm}{\infty} + \frac{1}{2} m 0^2 = 0 \rightarrow \\ E_{m2} = -G \frac{Mm}{R_o} + \frac{1}{2} m v_e^2 \end{cases}$$

$$0 = 0 - \left( -G \frac{Mm}{R_o} + \frac{1}{2} m v_e^2 \right) \rightarrow \frac{1}{2} m v_e^2 = G \frac{Mm}{R_o} \rightarrow v_e = \sqrt{2G \frac{M}{R_o}}$$

→

$$v_e = \sqrt{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{4.29 \cdot 10^{24}}{\frac{3.6 \cdot 10^7}{\pi}}} \approx 4.997 \text{ m/s}$$

### **Problema 3 (campo gravitatorio. Cuestión)**

**Deduzca la expresión de la velocidad orbital de un satélite y razone si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: cuanto mayor sea la masa de un satélite orbitando a una determinada altura más tardará en dar una vuelta completa en su órbita.**

De la ley fundamental de la dinámica de rotación,  $F_c = ma_c$ , y teniendo en cuenta que, en el movimiento orbital, la fuerza centrípeta es la fuerza de la gravedad, tenemos:

$$F_c = ma_c \rightarrow G \frac{M \cdot m_s}{R_o^2} = m_s \frac{v^2}{R_o} \rightarrow v^2 = G \frac{M}{R_o} \rightarrow v = \sqrt{G \frac{M}{R_o}}$$

Si en la ley anterior hacemos aparecer el periodo y lo despejamos

$$v = \omega R_o = \frac{2\pi}{T} R_o \rightarrow \frac{2\pi}{T} R_o = \sqrt{G \frac{M}{R_o}} \rightarrow T = \frac{2\pi R_o}{\sqrt{G \frac{M}{R_o}}}$$

Observamos que no depende en absoluto de la masa del satélite. Por lo tanto, **la afirmación es falsa.**

**Problema 4 (campo gravitatorio. Movimiento orbital)**

**Se desea colocar un satélite en órbita alrededor de la tierra de forma que su periodo orbital sea de 6 horas. Calcule:**

**a) ¿A qué altura sobre la superficie debe de estar?**

**b) ¿Cuál será su velocidad orbital?**

**Datos:  $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ ;  $M_T = 5.98 \cdot 10^{24}$ ;  $R_T = 6370 \text{ km}$**

**a)**

Aplicamos la ley fundamental y hacemos que aparezca el periodo, dato del problema:

$$G \frac{M_T m_s}{R_o^2} = m_s \omega^2 R_o \rightarrow \mathbf{GM_T = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_o^3}$$

Sustituyendo datos en la ecuación en “negrita”

$$\begin{aligned} 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24} &= \frac{4\pi^2}{(6 \cdot 3600)^2} R_o^3 \rightarrow R_o \\ &= 16767111 \text{ m} \rightarrow \end{aligned}$$

La altura sobre la superficie será el radio orbital calculado menos el radio de la tierra:

$$\mathbf{h = R_o - R_T \approx 16767 - 6370 = 10397 \text{ km}}$$

**b)**

Dado que conocemos el periodo y el radio orbital, podemos calcular la velocidad orbital a partir de la relación:

$$\mathbf{v = \omega R = \frac{2\pi}{T} R = \frac{2\pi}{6} 16767 \approx 17558 \text{ km/h}}$$

**Problema 5 (campo gravitatorio. Relación de radios y periodos)**

**Dos satélites artificiales describen órbitas circulares alrededor de un planeta de masa  $M$  de forma que el radio de la órbita del primer satélite es cuatro veces mayor que el radio de la órbita del segundo. Responda razonadamente:**

- a) ¿Qué relación existe entre las velocidades orbitales de ambos satélites?**  
**b) ¿Qué relación existe entre sus periodos orbitales?**

**a)**

Aplicando la ley fundamental de la dinámica a la órbita circular:

$$F_c = m \frac{v^2}{R_o} \rightarrow G \frac{Mm}{R_o^2} = m \frac{v^2}{R_o} \rightarrow \mathbf{GM = v^2 R_o}$$

Se ha remarcado en **negrita** la fórmula de la que normalmente se puede partir, pero, como se ve, llegar a ella es muy corto y sencillo. Aplicándola a los dos satélites:

$$\begin{array}{l} S_1: GM = v_1^2 R_{o1} \\ S_2: GM = v_2^2 R_{o2} \end{array} \rightarrow |\div| \rightarrow \mathbf{1} = \frac{v_1^2 R_{o1}}{v_2^2 R_{o2}} = \frac{v_1^2 \cdot (4R_{o2})}{v_2^2 R_{o2}} = \frac{\mathbf{4v_1^2}}{\mathbf{v_2^2}} \rightarrow$$

Ya tenemos la relación entre las velocidades, arreglando la ecuación en **negrita**

$$4v_1^2 = v_2^2 \rightarrow \mathbf{2v_1 = v_2}$$

**b)**

Relacionando el módulo de la velocidad lineal con la velocidad angular y el periodo:

$$v = \omega R \rightarrow v = \frac{2\pi}{T} R_O \rightarrow \begin{aligned} S_1: v_1 &= \frac{2\pi}{T_1} R_{O1} \rightarrow \frac{v_2}{2} = \frac{2\pi}{T_1} 4R_{O2} \\ S_2: v_2 &= \frac{2\pi}{T_2} R_{O2} \rightarrow v_2 = \frac{2\pi}{T_2} R_{O2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow |\div| \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{4T_2}{T_1} \rightarrow T_1 = 8T_2$$

Con el signo  $|\div|$  queremos decir que se dividen entre sí las dos últimas ecuaciones que aparecen en cada línea.

**Problema 6 (campo gravitatorio. Velocidad y energía orbital)**

**Un satélite de 600 kg se encuentra en órbita a una altura de 630 km sobre la superficie terrestre. Calcule:**

**a) La velocidad a la que orbita.**

**b) La energía mecánica del satélite en su órbita.**

**Datos:**  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ ;  $M_T = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ;  $R_T = 6370 \text{ km}$

**a)**

Aplicando la ley del ejercicio anterior, apartado “a”, tenemos:

$$GM_T = v^2 R_O \rightarrow v^2 = \frac{GM_T}{R_O} \rightarrow v = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24}}{(6370 + 630) \cdot 10^3}}$$

$$\rightarrow$$

$$v \approx 7750 \text{ ms}^{-1}$$

**b)**

La energía mecánica de un satélite es la suma de la cinética más la potencial:

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{M_T m}{R_o} = \left| v^2 = G \frac{M_T}{R_o} \right| = \frac{1}{2}mG \frac{M_T}{R_o} - G \frac{M_T m}{R_o} \rightarrow$$

$$E_m = -\frac{1}{2}G \frac{M_T m}{R_o} = -\frac{1}{2}6.67 \cdot 10^{-11} \frac{5.98 \cdot 10^{24} \cdot 600}{7 \cdot 10^6} \\ \approx -1.71 \cdot 10^8 J$$