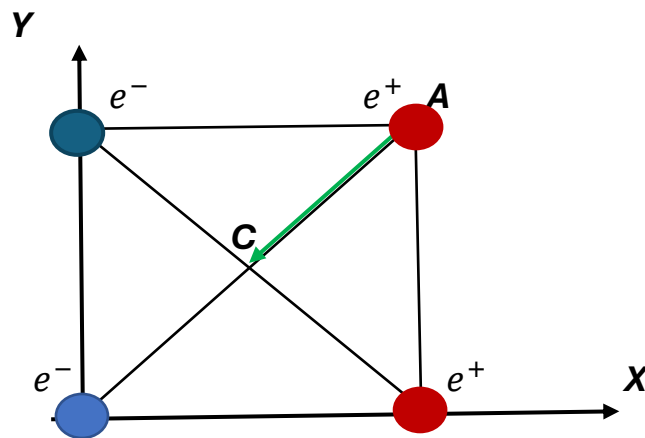


Problema 6 (campo eléctrico. Trabajo)

En los vértices de un cuadrado de 10^{-9} m de lado hay colocados dos electrones y dos protones tal como se indica en la figura. Calcular el trabajo necesario para trasladar uno de los dos protones al centro del cuadrado.

Datos: carga del electrón: $e^- = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C; carga del protón: $e^+ = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C; constante de Coulomb: $k = 9 \cdot 10^9$ N · m²C⁻¹



Nos preguntan sobre el trabajo que **el exterior** tiene que hacer para trasladar uno de los protones hasta el centro del cuadrado. Se habla de simplemente trasladarlo entre esas posiciones. **Se entiende entonces que las velocidades iniciales y finales de la carga que se traslada, uno de los dos protones, son nulas.**

Vamos a utilizar el teorema del trabajo entre ambas posiciones. La energía mecánica inicial del protón será sólo la **energía potencial eléctrica debida a los potenciales creados por las demás cargas**. Lo mismo la energía mecánica final.

Elegimos uno de los dos protones, el de la esquina superior derecha. Como hemos dicho, nos hace saber el potencial en los puntos **A** y **C** creado por las otras tres cargas, para después poder calcular las energías potenciales finales e iniciales. El valor de la diagonal entra en los cálculos y la hallamos aplicando Pitágoras.

$$D = \sqrt{(10^{-9})^2 + (10^{-9})^2} = 10^{-9}\sqrt{2} \text{ m}$$

Calculamos los potenciales:

$$\begin{aligned}
 V_A &= \sum k \frac{q_i}{d_i} \\
 &= k \sum \frac{q_i}{d_i} \\
 &= 9 \cdot 10^9 \left(\frac{-1.6 \cdot 10^{-19}}{10^{-9}} + \frac{-1.6 \cdot 10^{-19}}{10^{-9}\sqrt{2}} + \frac{+1.6 \cdot 10^{-19}}{10^{-9}} \right) \rightarrow \\
 V_A &= 9 \cdot 10^9 \left(\frac{-1.6}{\sqrt{2}} \cdot 10^{-10} \right) = \frac{-1.44}{\sqrt{2}} \text{ V}
 \end{aligned}$$

De la misma manera, calculamos el potencial en **C**:

$$\begin{aligned}
 V_C &= 9 \cdot 10^9 \left(\frac{-1.6 \cdot 10^{-19}}{10^{-9} \frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{-1.6 \cdot 10^{-19}}{10^{-9} \frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{+1.6 \cdot 10^{-19}}{10^{-9} \frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \rightarrow \\
 V_C &= 9 \cdot 10^9 \left(\frac{-2 \cdot 1.6}{\sqrt{2}} \cdot 10^{-10} \right) = \frac{-2.88}{\sqrt{2}} \text{ V}
 \end{aligned}$$

Ya estamos en condiciones de aplicar el teorema del trabajo:

$$\begin{aligned}
 W_{NC_A}^C &= E_{MC} - E_{MA} \rightarrow \left| \begin{array}{l} W_{NC_A}^C = ? \\ E_{MC} = e^+ \cdot V_C = 1.6 \cdot 10^{-19} \frac{-2.88}{\sqrt{2}} \\ E_{MA} = e^+ \cdot V_A = 1.6 \cdot 10^{-19} \frac{-1.44}{\sqrt{2}} \end{array} \right| \rightarrow \\
 W_{NC_A}^C &= 1.6 \cdot 10^{-19} \frac{-2.88}{\sqrt{2}} - 1.6 \cdot 10^{-19} \frac{-1.44}{\sqrt{2}} \rightarrow \\
 W_{NC_A}^C &= \frac{1.6 \cdot 10^{-19}}{\sqrt{2}} (1.44 - 2.88) \approx -1.63 \cdot 10^{-19} \text{ J}
 \end{aligned}$$

El trabajo que tiene que hacer el exterior sale, como vemos, negativo. **Eso significa que para que el protón llegue parado al punto C, el exterior tiene que ir “frenando”, ejerciendo una fuerza contraria al movimiento puesto que es el campo el que produciría ese movimiento espontáneamente.** Podemos ver, de la misma

manera, que los electrones de la izquierda atraen claramente al protón hasta la posición final

Problema 7 (campo eléctrico. Cargas puntuales)

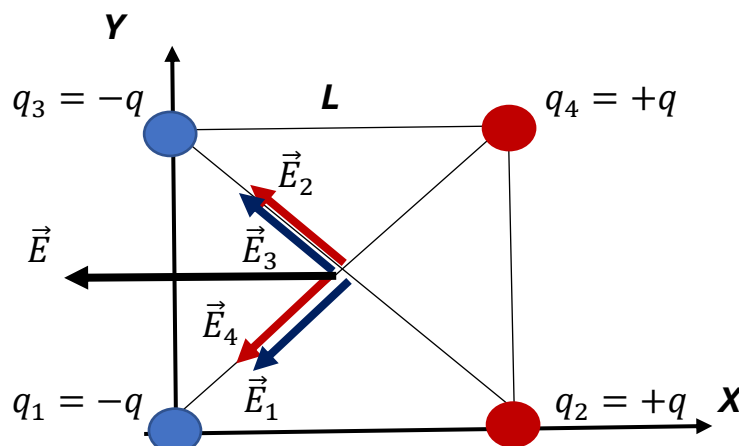
En los vértices de un cuadrado de lado L hay colocadas dos cargas positivas q y dos cargas negativas $-q$ tal como se indica en la figura. Una quinta carga negativa $-q$ está situada en el centro del cuadrado.

- a) Calcular el vector campo eléctrico en el centro del cuadrado.**
- b) Calcular la fuerza que las cuatro cargas situadas en las esquinas del cuadrado ejercen sobre la carga situada en el centro del cuadrado.**

Expresar los resultados en función de q , L y la constante de Coulomb k

a)

Lo primero que hacemos, como hemos dicho en la teoría, es dibujar los vectores campo creados por cada una de las cargas. En la figura se han dibujado las cargas positivas en rojo y las negativas en azul, igual que los vectores campo que producen.



En un segundo paso, calculamos los módulos de esos vectores. Creemos que es fácil de ver que, al tener las cargas el mismo módulo y estar lo mismo del centro del cuadrado, donde queremos calcular el campo, el módulo de los cuatro vectores campo es el mismo. La distancia de cada una de las cargas al centro es la mitad de la diagonal.

$$D = \sqrt{L^2 + L^2} = L\sqrt{2} \rightarrow \frac{D}{2} = \frac{L\sqrt{2}}{2} \rightarrow |\vec{E}| = k \frac{q}{d^2} = k \frac{2q}{L}$$

Mirando la figura, creemos que también es fácil de ver que las componentes verticales de los cuatro vectores se anulan ya que dos van hacia arriba y dos hacia abajo y son la misma intensidad. Por lo tanto, para calcular el campo total vamos a calcular la componente horizontal de uno de ellos y multiplicaremos por cuatro. El ángulo que forman con la horizontal es de 45 grados.

$$E_x = E \cdot \cos 45 = k \frac{2q}{L} \frac{\sqrt{2}}{2} = k \frac{\sqrt{2}q}{L} \rightarrow \vec{E} = 4k \frac{\sqrt{2}q}{L} (-\vec{i}) \rightarrow$$

$$\vec{E} = -4k \frac{\sqrt{2}q}{L} \vec{i}$$

b)

Para calcular la fuerza que en ese punto se ejerce a cualquier carga basta multiplicar el vector campo por la carga:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} = (-q) \left(-4k \frac{\sqrt{2}q}{L} \vec{i} \right) = k \frac{4\sqrt{2}q^2}{L} \vec{i}$$

Donde, por tratarse de una ley vectorial, se ha puesto la carga con su signo.

Problema 8 (campo eléctrico. Cargas puntuales)

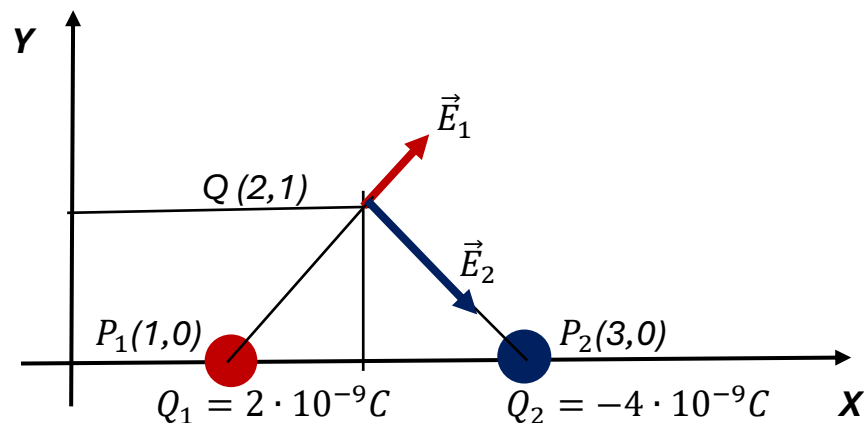
Dos cargas puntuales $Q_1 = 2 \text{ nC}$ y $Q_2 = -4 \text{ nC}$ se encuentran en el plano XY en los puntos $P_1(1,0) \text{ m}$ y $P_2(3,0) \text{ m}$, respectivamente. Calcule:

- El campo eléctrico creada por ambas cargas en el punto $(2,1)$.**
- Las coordenadas del punto del eje X situado a la izquierda de la carga Q_1 ($x < 1 \text{ m}$) en el que el potencial electrostático creado por ambas cargas es cero.**

Dato: Constante de la ley de Coulomb, $K = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$

a)

Dibujamos el sistema de coordenadas con las cargas dadas y el punto Q donde nos piden el campo. Aplicando la definición de campo eléctrico, dibujamos los campos creados por cada una de las cargas en el punto Q



Campo creado por Q_1

$$\overrightarrow{P_1Q} = (1,1) \rightarrow \begin{cases} |\overrightarrow{P_1Q}| = d_1 = \sqrt{2} \\ \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \end{cases}$$

$$E_1 = k \frac{Q_1}{d_1} = 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-9}}{2} = 9$$

Conocido su módulo, E_1 , y el vector unitario en su dirección y sentido, $\vec{u}$, estamos en condiciones de calcular el vector $\vec{E}_1$:

$$\vec{E}_1 = E_1 \vec{u}_1 = 9 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1)$$

Campo creado por Q_2

$$\overrightarrow{QP_2} = (1, -1) \rightarrow \begin{cases} |\overrightarrow{QP_2}| = d_2 = \sqrt{2} \\ \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1) \end{cases}$$

$$E_2 = k \frac{Q_2}{d_2} = 9 \cdot 10^9 \frac{4 \cdot 10^{-9}}{2} = 18$$

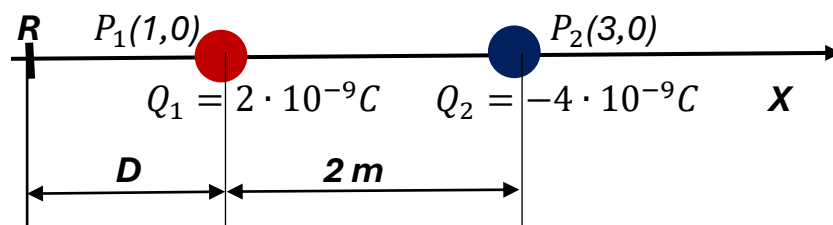
$$\vec{E}_2 = E_2 \vec{u}_2 = 18 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1)$$

El campo total será entonces:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \left(\frac{9}{\sqrt{2}} + \frac{18}{\sqrt{2}}, \frac{9}{\sqrt{2}} - \frac{18}{\sqrt{2}} \right) = \left(\frac{27}{\sqrt{2}}, -\frac{9}{\sqrt{2}} \right)$$

b)

Nos preguntan por el punto sobre el eje X y a la izquierda de la carga positiva en el que el potencial es cero. Para variar, hacemos un dibujo, donde definimos el punto buscado como **R**, a una distancia **D** de la carga roja.



$$V(R) = \sum k \frac{Q_i}{d_i} \rightarrow 0 = k \frac{2 \cdot 10^{-9}}{D} + k \frac{-4 \cdot 10^{-9}}{D + 2} \rightarrow$$

$$0 = 2k \cdot 10^{-9} \left(\frac{1}{D} - \frac{2}{D + 2} \right) \rightarrow \frac{1}{D} = \frac{2}{D + 2} \rightarrow$$

$$D + 2 = 2D \rightarrow \mathbf{D = 2} \rightarrow \mathbf{R(-1, 0)}$$