

Problema 5 (campo eléctrico. Energía. Trabajo)

Dos masas puntuales de 0.2 kg de masa cada una y con igual carga $q = 2\mu\text{C}$ se encuentran inicialmente en reposo y a una distancia de 1 m . Determinar:

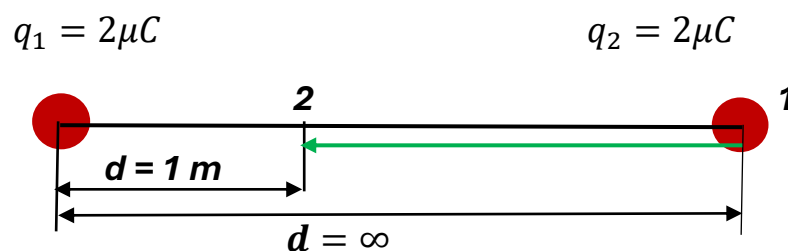
- a) La energía mecánica del sistema.**
- b) La velocidad que tendrán las masas después de separarse 4 m entre sí.**

Dato: la constante de Coulomb $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$

a)

La energía mecánica de un sistema de partículas en cierta posición viene dada por su energía potencial. En este caso tendremos dos energías potenciales, la gravitatoria y la eléctrica, aunque, como sabemos, la eléctrica será mucho mayor que la gravitatoria. Además, por el dato que nos dan, sólo la constante de Coulomb, podemos pensar que sólo nos preguntan por la energía eléctrica. Aquí vamos a hacer las dos para enseñar los dos tipos.

Cuando dos masas o cargas están infinitamente alejadas no se ejercen ningún tipo de interacción. Por lo tanto, ha ese estado le asociamos nula energía. Pero nuestras masas y cargas están situadas a un metro. Para calcular la energía potencial eléctrica de ese sistema, **suponemos una de ellas en su posición y definimos entonces la energía del sistema como el trabajo que tiene que hacer el exterior para llevar a la otra desde el infinito hasta, en este caso, 1 m de ella, con velocidad cero en ambos puntos.** Para calcular ese trabajo utilizamos, como no podía ser de otra manera, el teorema del trabajo:



La energía potencial inicial y final de la carga que se traslada, q_2 , proviene del potencial creado por las demás, en este caso q_1 .

Dicho esto, aplicamos el teorema del trabajo a la carga q_2 entre su posición inicial, **1**, y su posición final **2**:

$$W_{NC_1}^2 = Em_2 - Em_1 \rightarrow \left| \begin{array}{l} W_{NC_1}^2 = ? \\ Em_2 = k \frac{q_1}{d_2} q_2 = 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-6}}{1} 2 \cdot 10^{-6} \\ Em_1 = k \frac{q_1}{d_1} q_2 = 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\infty} 2 \cdot 10^{-6} = 0 \end{array} \right|$$

$$\rightarrow W_{NC_1}^2 = k \frac{q_1}{d_2} q_2 - 0 = 36 \cdot 10^{-3} - 0 \rightarrow Em_{sistema} = 3.6 \cdot 10^{-2} J$$

Podemos concluir que la energía eléctrica de dos cargas cuando están separadas una distancia d es:

$$Em_{eléctrica} = k \frac{q_1}{d} q_2$$

Poniendo cada carga con su signo.

La energía mecánica gravitatoria se halla utilizando los mismos argumentos:

$$W_{NC_1}^2 = Em_2 - Em_1 \rightarrow \left| \begin{array}{l} W_{NC_1}^2 = ? \\ Em_2 = -G \frac{m_1}{d_1} m_2 = -6.67 \cdot 10^{-11} \frac{0.2}{1} 0.2 \\ Em_1 = -G \frac{m_1}{d_2} m_2 = -6.67 \cdot 10^{-11} \frac{0.2}{\infty} 0.2 = 0 \end{array} \right|$$

$$\rightarrow W_{NC_1}^2 = -6.67 \cdot 4 \cdot 10^{-13} - 0 \rightarrow Em_{sistema} = -6.67 \cdot 4 \cdot 10^{-13} J$$

Podemos concluir que la energía gravitatoria de dos masas cuando están separadas una distancia d es:

$$Em_{gravt} = -G \frac{m_1}{d} m_2$$

Como vemos, podemos despreciar la energía potencial gravitatoria frente a la eléctrica. La diferencia de signos se debe a que en el caso de la energía mecánica eléctrica **es el exterior el que ha tenido que ejercer ese trabajo sobre el sistema, aumentando su energía**. En el caso de la energía gravitatoria, dado que siempre es atractiva, el exterior tiene que hacer un trabajo negativo para que la masa m_2 llegue parada al punto final o, lo que es lo mismo, es el sistema el que ha hecho el trabajo de “acercamiento” entre las masas.

b)

Si las cargas se separan debido sólo a su repulsión y, por lo tanto, **se ha de conservar su energía mecánica porque no han actuado fuerzas no conservativas**. Como hemos visto en el apartado anterior, cuando dos cargas están separadas una distancia d , su energía es:

$$E = k \frac{q_1 \cdot q_2}{d}$$

En nuestro caso, **en la situación inicial están separadas 1 m** y su velocidad es cero. Entonces, su energía mecánica será:

$$E_{inicial} = 9 \cdot 10^9 \frac{(2 \cdot 10^{-6})^2}{1} = 36 \cdot 10^{-3} J$$

Cuando estén separadas **4 m** la energía mecánica será la suma de la potencial y de las cinéticas:

$$E_{final} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + k \frac{q_1 q_2}{d} = |m_1 = m_2 = 0.2| =$$

$$\frac{1}{2} 0.2 v_1^2 + \frac{1}{2} 0.2 v_2^2 + 9 \cdot 10^9 \frac{(2 \cdot 10^{-6})^2}{4} = 0.1 v_1^2 + 0.1 v_2^2 + 9 \cdot 10^{-3} J$$

Y, como ambas energías han de ser iguales:

$$36 \cdot 10^{-3} = 0.1 v_1^2 + 0.1 v_2^2 + 9 \cdot 10^{-3} \rightarrow 27 \cdot 10^{-3} = 0.1 (v_1^2 + v_2^2) \rightarrow$$

$$27 \cdot 10^{-2} = v_1^2 + v_2^2 \quad (1)$$

Podíamos intuir, y además bien, que al ser las dos masas iguales las dos velocidades han de ser iguales. Sin embargo, hemos de tener una ley que nos permita deducir eso, entre otras cosas porque las masas no tienen por qué ser iguales (aunque en ese caso, creemos, el enunciado no sería propio de nuestros contenidos). Esa ley es la de conservación del momento lineal, ya que no han actuado fuerzas exteriores sobre el sistema de las dos cargas.

$$\begin{aligned}\vec{p}_i &= 0 \quad (v = 0) \\ \vec{p}_f &= m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0.2v_1 + 0.2v_2 \rightarrow \vec{p}_i = \vec{p}_f \rightarrow \\ 0 &= 0.2(v_1 + v_2) \rightarrow v_1 = -v_2\end{aligned}$$

Por lo tanto, las velocidades tienen, efectivamente, el mismo módulo. El signo **“menos”** de la última igualdad significa que sus sentidos son contrarios, como nos podíamos imaginar. Llevando esta conclusión a la última ecuación marcada **(1)**:

$$27 \cdot 10^{-2} = v_1^2 + v_2^2 = 2v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{27 \cdot 10^{-2}}{2}} \text{ m/s}$$