

Ejercicio 5 (probabilidad. Binomial, aproximación a Normal)

Según el Instituto Nacional de Estadística, durante el último trimestre de 2020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de consejos de administración de las empresas que componen el Ibex-35 fue del 27,7%. Se reunieron 10 de estos consejeros.

- a) Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.**
- b) Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.**
- c) Determine, aproximando mediante una distribución normal, la probabilidad de que en un Congreso de 200 consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35% de representación femenina.**

Según los datos del enunciado, llamando **M** al suceso “ser mujer” y **H** al suceso “ser hombre” y siendo sucesos claramente incompatibles, tenemos:

$$P(M) = 0.277$$

$$P(H) = 0.723$$

Ahora, al elegir diez personas, tenemos que ver que se trata de una distribución binomial. Eligiendo como “éxito” el suceso “ser mujer”:

$$B(10, 0.277)$$

a)

$$P(x = 5) = \binom{10}{5} (0.277)^5 (0.723)^5$$

b)

La probabilidad de que haya al menos un hombre sería la suma de las probabilidades de que haya uno, dos.....diez. Son diez sucesos. El suceso contrario, “ningún hombre”, es sólo un suceso. Su probabilidad corresponde a que haya diez mujeres:

$$P(x = 10) = \binom{10}{10} 0.277^{10} 0.723^0 = 0.277^{10}$$

El suceso contrario, algún hombre, tendrá probabilidad:

$$P(x \neq 10) = 1 - 0.277^{10}$$

c)

Para aproximar la distribución a la normal, cuando n es muy grande, tenemos que saber:

$$B(n, p) \approx N(np, \sqrt{npq}) \text{ si } \begin{cases} n > 10 \\ n \cdot p > 5 \\ n \cdot q > 5 \end{cases}$$

En nuestro caso:

$$\begin{cases} n = 200 \\ n \cdot p = 200 \cdot 0.277 = 55.4 \\ n \cdot q = 200 \cdot 0.723 = 144.6 \end{cases}$$

Cumpléndose, por lo tanto, los requisitos para hacer la aproximación:

$$B(200, 0.277) \rightarrow N(200 \cdot 0.277, \sqrt{200 \cdot 0.277 \cdot 0.723}) = N(55.4, 6.33)$$

Ya estamos en condiciones de contestar a lo que nos preguntan:

$$\begin{aligned} \frac{35}{100} \cdot 200 &= 70 \rightarrow P(x > 70) = 1 - P(x < 70) = \\ &= 1 - P\left(z < \frac{70 - 55.4}{6.33}\right) = 1 - P(z < 2.30) = 1 - 0.9893 = \mathbf{0.01} \end{aligned}$$

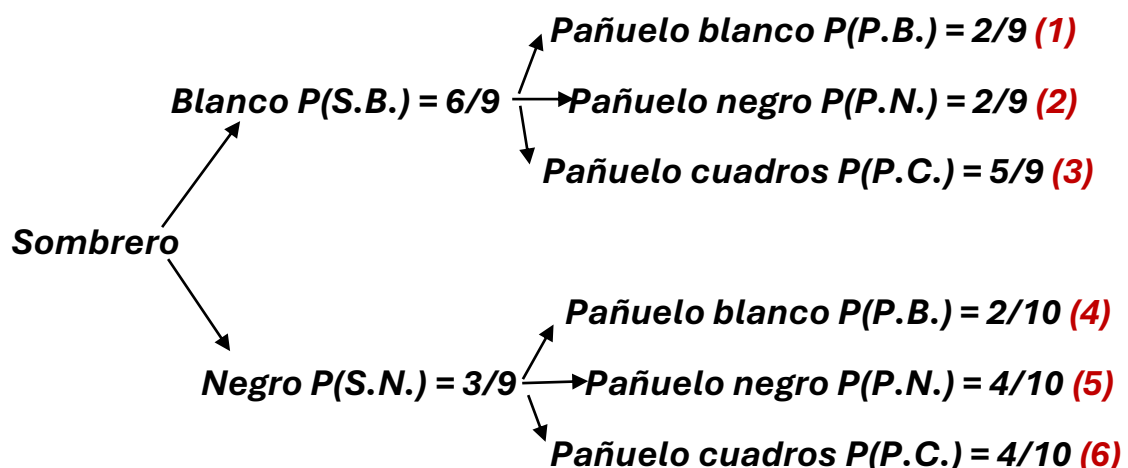
Ejercicio 6 (probabilidad. Diagrama árbol)

De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco se toma al azar un pañuelo de un cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si sombrero es negro se elige al azar un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros blancos y negros. Se pide

- a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.**
- b) (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los dos complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.**
- c) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.**

a)

En estos problemas es muy visual el diagrama de árbol, aunque no necesario. Aquí lo vamos a hacer:



Los sucesos que cumplen la condición del enunciado de la pregunta son los sucesos **(2), (3), (4) y (6)**. Como debemos de saber, la probabilidad total de esos cuatro sucesos se calcula, atendiendo al árbol, multiplicando las probabilidades que aparecen en cada “rama” y sumando las de todas las ramas que satisfacen la condición.

Aplicando el teorema de la probabilidad total y llamando **A** al suceso en cuestión:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(S.B.) \cdot P(P.N./S.B.) + P(S.B.) \cdot P(P.C./S.B.) + \\ &+ P(S.N.) \cdot P(P.B./S.N.) + P(S.N.) \cdot P(P.C./S.N.) = \\ &\frac{6}{9} \cdot \frac{2}{9} + \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{10} + \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{10} = \frac{42}{81} + \frac{18}{90} \approx \mathbf{0.7581} \end{aligned}$$

Hubiera sido más corto el calcular la probabilidad del suceso complementario que está compuesto sólo por dos ramas. Nos hemos dado cuenta ahora, por lo que, como es conveniente, merece la pena mirar antes qué camino puede ser más corto, si el suceso que nos preguntan o su complementario. Sirva de ejemplo.

b)

Para contestar a la pregunta de cuál es la probabilidad de que aparezca algún complemento sea negro tendremos en cuenta lo que hemos dicho en el último párrafo de la pregunta anterior. Es mucho más corto el calcular la probabilidad de que no aparezca ninguno negro, que sólo es un caso, que el que aparezca alguno. Llamando **N** al suceso “aparece algún complemento negro”:

$$\begin{aligned} P(N) &= 1 - P(\overline{N}) = 1 - P(S.B.) \cdot P(P.B./S.N.) = 1 - \frac{6}{9} \cdot \frac{2}{9} = \\ &= \frac{69}{81} = \frac{\mathbf{23}}{\mathbf{27}} \end{aligned}$$

c)

Nos preguntan la probabilidad de que el sombrero haya sido negro si se sabe que el pañuelo ha salido de cuadros. Claramente sabemos la probabilidad de que el pañuelo salga de cuadros si el sombrero es negro, por lo que tenemos que cambiar la condicionada

de orden. Es para eso, sobre todo, para lo que utilizamos el teorema de Bayes:

$$P(S.N./P.C.) = \frac{P(S.N.)P(P.C./S.N.)}{P(P.C.)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{9}} = \frac{9}{34}$$