

Ejercicio 1 (probabilidad. Normal)

La presión arterial de una muestra de adolescentes sigue una distribución normal de media 120 mm de mercurio y doce de desviación típica. Si se elige a un adolescente al azar halla:

a) La probabilidad de que su presión arterial mayor que 132 mm Hg

b) De que esté entre 96 y 144

Se dispone de la tabla de la distribución normal.

Ambas preguntas se responden fácilmente utilizando la distribución normal. Contestamos a la primera pregunta.

a)

$$\begin{aligned} N_x(\bar{x} = 120 \sigma = 12) &\rightarrow P(x \geq 132) = 1 - P(x \leq 132) = \\ 1 - P\left(z \leq \frac{132 - 120}{12}\right) &= 1 - P(z \leq 1) = |tabla| = 1 - 0.8413 \\ P(x \geq 132) &= \mathbf{0.1587} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(96 \leq x \leq 144) &= P\left(\frac{96 - 120}{12} \leq z \leq \frac{144 - 120}{12}\right) = P(-2 \leq z \leq 2) \\ P(z \leq 2) - P(z \leq -2) &= P(z \leq 2) - (1 - P(z \leq 2)) = 2P(z \leq 2) - 1 \\ &= |tabla| = 2 \cdot 0.9772 - 1 = \mathbf{0.9544} \end{aligned}$$

Ejercicio 2 (probabilidad. Teoremas)

Estudia la posible dependencia de los sucesos A y B en los siguientes casos:

A y B son incompatibles y de probabilidad no nula

B está incluido en A y su probabilidad no es nula

Si A y B son incompatibles la probabilidad de la intersección es cero. Por lo tanto:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0 \neq P(A)$$

Son, por lo tanto, dependientes pues la probabilidad de que se dé A cambia claramente sabiendo que ha ocurrido B , es el suceso imposible como vemos.

En el segundo caso, si B está incluido en A :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \neq P(A)$$

Y, al igual que en el caso anterior, son sucesos dependientes puesto que la probabilidad de que se dé el suceso A es uno, la del suceso seguro. Esto es claro puesto que el suceso B está incluido en el suceso A , por lo que si se da B se da A con toda seguridad.

Ejercicio 3 (probabilidad. Binomial)

En una Comunidad Autónoma tres de cada cinco alumnos de segundo de bachillerato están matriculados en la asignatura de matemáticas II. Se eligen 6 alumnos al azar de entre todos los alumnos de segundo de bachillerato se pide:

- a) (075 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos estén matriculados en matemáticas dos.**
- b) (075 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos esté matriculado en matemáticas dos.**
- c) (1 punto) Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 alumnos, calcular, aproximando la distribución binomial mediante una distribución normal, la probabilidad de que más de 60 de estos alumnos estén matriculados en matemáticas II.**

a)

Se trata de una distribución binomial formada por dos sucesos incompatibles: el alumno está matriculado en matemáticas II, con una probabilidad de $\frac{3}{5}$, o no lo está, con una probabilidad de $\frac{2}{5}$. Tomando como éxito el hecho de que esté matriculado en matemáticas II, tenemos:

$$B\left(6, \frac{3}{5}\right)$$
$$P(X = 4) = \binom{6}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^4 \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

b)

Como ya hemos comentado en algún otro ejercicio, el suceso alguno, formado por varios, es el complementario del suceso ninguno, mucho más fácil de calcular. Por lo tanto:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{6}{0} \left(\frac{3}{5}\right)^0 \left(\frac{2}{5}\right)^6$$

c)

Como debemos de recordar, una binomial se puede aproximar a un normal si

$$n \cdot p \geq 5 \text{ y } n \cdot q \geq 5$$

Algo que se cumple en nuestro caso (además de que si no se cumplen esas condiciones nunca nos harían esa pregunta). Entonces se sabe que:

$$B(n, p) \rightarrow N(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot q})$$

En nuestro caso:

$$B\left(120, \frac{3}{5}\right) \rightarrow N\left(120 \cdot \frac{3}{5}, \sqrt{120 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}}\right) = N(72, 5.37)$$

Contestando a la pregunta:

$$\begin{aligned} P(X > 60) &= P(X_1 \geq 60.5) = 1 - P(X_1 \leq 60.5) \\ &= 1 - P\left(Z \leq \frac{60.5 - 72}{5.37}\right) = 1 - P(Z \leq -2.14) = \\ &= 1 - [1 - P(Z \leq 2.14)] = P(Z \leq 2.14) = 0.9838 \end{aligned}$$

Ejercicio 4 (probabilidad. Teoremas Total y Bayes)

Una empresa comercializa tres tipos de productos A, B y C. Cuatro de cada 7 productos son de tipo A, dos de cada siete productos son de tipo B y el resto lo son de tipo C. A la exportación se destina un 40% de los productos tipo A, un 60% de los productos tipo B y un 20% de los productos tipo C. Elegido un producto al azar se pide:

- a) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.**
b) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto es destinado a la exportación.

Resumimos los datos en el siguiente esquema:

$$\begin{aligned}P(A) &= \frac{4}{7} & P(E/A) &= 0.4 \\P(B) &= \frac{2}{7} & P(E/B) &= 0.6 \\P(C) &= \frac{1}{7} & P(E/C) &= 0.2\end{aligned}$$

a)

Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(E) = P(A)P(E/A) + P(B)P(E/B) + P(C)P(E/C) \rightarrow$$

$$P(E) = \frac{4}{7} \cdot 0.4 + \frac{2}{7} \cdot 0.6 + \frac{1}{7} \cdot 0.2 = \frac{3}{7} = \mathbf{0.428}$$

b)

Nos preguntan la probabilidad de que el producto sea del tipo **C** sabiendo que se va a exportar, $P(C/E)$. Como conocemos la condicionada cambiada de orden $P(E/C)$, utilizamos claramente el teorema de Bayes que nos relaciona ambas condicionadas:

$$P(C/E) = \frac{P(C)P(E/C)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{7} \cdot 0.2}{\frac{3}{7}} = \frac{0.2}{3} = \frac{1}{15} = \mathbf{0.067}$$