

Ejercicio 1 (límites)

Determina, si existe, el valor de “a” de tal manera que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + ax + 1} - (3x - 1) \right) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x + a}{3x - 1} \right)^x = e$$

Empezamos con el primero:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + ax + 1} - (3x - 1) \right) = (\infty - \infty)$$

Como vemos, se trata de una indeterminación $\infty - \infty$ por lo que tendremos que multiplicar y dividir por el conjugado de la resta que aparece:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + ax + 1} - (3x - 1) \right) \\ &= \frac{\left(\sqrt{9x^2 + ax + 1} - (3x - 1) \right) \left(\sqrt{9x^2 + ax + 1} + (3x - 1) \right)}{\left(\sqrt{9x^2 + ax + 1} + (3x - 1) \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{9x^2 + ax + 1} \right)^2 - (3x - 1)^2}{\sqrt{9x^2 + ax + 1} + (3x - 1)} = \\ & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + ax + 1 - (9x^2 + 1 - 6x)}{\sqrt{9x^2 + ax + 1} + (3x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + 6x}{\sqrt{9x^2 + ax + 1} + (3x - 1)} \end{aligned}$$

Y aplicando equivalencias a los polinomios, quedándonos con las x de mayor grado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a + 6)x}{3x + 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a + 6)x}{6x} = \frac{a + 6}{6}$$

Y, como el límite, según el enunciado, ha de tener el valor de **2**:

$$\frac{a + 6}{6} = 2 \rightarrow a = 6$$

El segundo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+a}{3x-1} \right)^x = \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+a}{3x-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = \infty \end{array} \right| = (1^\infty)$$

Al tratarse de indeterminación 1^∞ aplicamos la fórmula:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)(f(x)-1)}$$

En nuestro caso:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+a}{3x-1} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{3x+a}{3x-1} - 1 \right)} \quad (1)$$

Y hacemos el límite del exponente:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{3x+a-(3x-1)}{3x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{a+1}{3x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a+1)x}{3x} = \frac{a+1}{3}$$

No nos olvidamos en sustituir en la ecuación **(1)**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+a}{3x-1} \right)^x = e^{\frac{a+1}{3}}$$

Y, dado que en el enunciado ese límite ha de valer **e**:

$$e^{\frac{a+1}{3}} = e \rightarrow \frac{a+1}{3} = 1 \rightarrow a = 2$$

Ejercicio 2 (límites)

Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^3 - 6x^2}{4x^3 - 1} \right)^{\frac{x^2+1}{x}}$$

Hacemos el primero:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x} = \left(\frac{0}{0} \right) = |L'Hôpital| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x}$$

Antes de continuar, **operamos y simplificamos lo que se pueda la fracción obtenida:**

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{(1 - \cos x)\cos^2 x} =$$

Sigue siendo un cociente indeterminado **(0/0)**. Debemos simplificar, como hemos dicho, lo que se pueda. Para ello, nos debemos de dar cuenta que

$$1 - \cos^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$$

Y sustituyendo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{(1 - \cos x)\cos^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)\cos^2 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{1} = 2 \end{aligned}$$

El segundo

Por tratarse del límite de una exponencial, calculamos primero el límite de la base y el límite del exponente, para ver de qué tipo de indeterminación se trata:

Base:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 6x^2}{4x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3}{4x^3} = 1$$

Exponente:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

Por lo tanto, tenemos una indeterminación del tipo 1^∞ y aplicamos su fórmula:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = e^{g(x)[f(x)-1]}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^3 - 6x^2}{4x^3 - 1} \right)^{\frac{x^2+1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x} \left[\frac{4x^3 - 6x^2}{4x^3 - 1} - 1 \right]} \quad (1)$$

Hacemos el límite del exponente:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x} \left[\frac{4x^3 - 6x^2}{4x^3 - 1} - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x} \cdot \frac{4x^3 - 6x^2 - (4x^3 - 1)}{4x^3 - 1} = \\ & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x} \cdot \frac{1 - 6x^2}{4x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x^4 + 1 - 6x^2}{4x^4 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^4}{4x^4} \\ &= -\frac{6}{4} \end{aligned}$$

Y ahora, sustituimos en (1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^3 - 6x^2}{4x^3 - 1} \right)^{\frac{x^2 + 1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x} \left[\frac{4x^3 - 6x^2}{4x^3 - 1} - 1 \right]} = e^{-\frac{3}{2}}$$