

Ejercicio 7 (Funciones)

Sea la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

- a) (0.5 puntos) Compruebe si la función verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo $[-1 \ 1]$**
- b) (1 punto) Calcule y clasifique los extremos relativos de la función $f(x)$ en R .**
- c) (1 punto) un punto determine el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje OX en el intervalo $[-1 \ 1]$**

a)

La función cumplirá las hipótesis del teorema de Bolzano en ese intervalo si es continua y cambia de signo en los extremos.

Una función cociente de polinomios es continua para todo valor de x salvo los que anulan el denominador.

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \sqrt{-1} \notin R$$

Por lo tanto, al no haber ningún valor de la variable que anule el denominador, la función es continua en todo **R** .

Los signos de **$f(x)$** en los extremos son:

$$f(-1) = \frac{-1}{2} < 0; \quad f(1) = \frac{1}{2}$$

Como cambia de signo, también se cumple la segunda hipótesis. La función cumple las hipótesis del teorema de Bolzano.

b)

Los extremos relativos anulan la primera derivada, por lo tanto:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1 + x^2) - x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(1 + x^2)^2} = 0 \rightarrow -x^2 + 1 = 0 \rightarrow$$
$$x = \pm 1$$

Para deducir cuál es máximo o cuál es mínimo, tenemos en cuenta que los máximos hacen la segunda derivada negativa y los mínimos la hacen positiva.

$$f''(x) = \frac{-2x(1 + x^2)^2 - (-x^2 + 1) \cdot 2(1 + x^2) \cdot 2x}{(1 + x^2)^4} =$$
$$= \frac{(1 + x^2)[-2x(1 + x^2) - 4x(-x^2 + 1)]}{(1 + x^2)^4} = \frac{2x^3 - 6x}{(1 + x^2)^3} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3}$$
$$f''(-1) = \frac{4}{8} > 0 \rightarrow m$$
$$f''(1) = \frac{-4}{8} < 0 \rightarrow M$$

c)

El área entre una función y el eje **OX** en un intervalo es la integral definida de la función en ese intervalo. Pero ¡jojo! Debemos de hacer un esbozo de la función pues, si parte de la función es negativa y parte positiva en ese intervalo, la integral dará como negativa el área que esté por debajo y positiva la que esté por arriba y el resultado será la suma de ambos números. La suma entonces de esas dos áreas no coincidirá con lo que definimos como área total, pues cuando se habla de área se entiende su valor absoluto.

Con lo que hemos deducido en los apartados anteriores, y con los cortes con los ejes, pensamos que no es complicado realizar ese esbozo. Además, creemos que es fácil de ver que esa función es impar:

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x}{x^2 + 1} = -f(x)$$

Cortes con los ejes:

$$OX: \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{x}{x^2 + 1} \rightarrow 0 = \frac{x}{x^2 + 1} \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0) \end{cases}$$

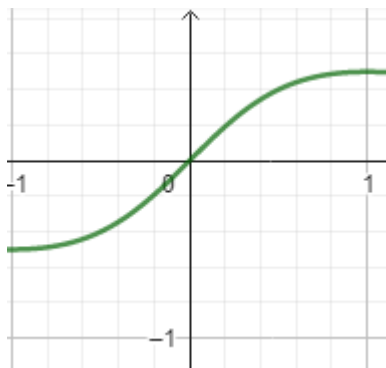
$$OY: \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x}{x^2 + 1} \rightarrow y = 0 \rightarrow (0,0) \end{cases}$$

Máximos y mínimos:

$$M: x = 1 \rightarrow y = \frac{1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2} \rightarrow \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

$$m: \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$$

Con esta información es suficiente para dibujar la gráfica en el intervalo de integración $[-1 \ 1]$



Como vemos en la figura, y al tratarse de una función impar, para calcular el área entre $x = -1$ y $x = 1$ bastará con calcular la integral entre $x = 0$ y $x = 1$ y multiplicar el resultado por dos:

$$A = 2 \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \left| \int \frac{f' dx}{f} = \ln f \right| =$$

$$= \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \mathbf{\ln 2 \ u^2}$$