

Ejercicio 5 (Funciones)

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x \ln x & x > 0 \end{cases}$$

- a) (0.5 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función en $x=0$**
b) (1punto) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, así como los máximos y mínimos relativos.
c) (1punto) Calcule

$$\int_1^2 f(x) dx$$

a)

Estudiamos las tres condiciones que definen la continuidad en un punto:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = (0 \cdot (-\infty)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{-\infty}{\infty} \right) = |L'H| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \frac{-x^2}{x} = 0 \\ f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \end{cases}$$

Dado que se cumplen las tres condiciones, la función es continua en $x = 0$

Para ver si es derivable, aplicamos la definición de derivada:

$$\begin{aligned} y'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - 0}{x - 0} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto, no es derivable en $x = 0$

b)

Para estudiar los máximos y mínimos relativos estudiamos la derivada en cada uno de los intervalos donde la función está definida de distinta manera:

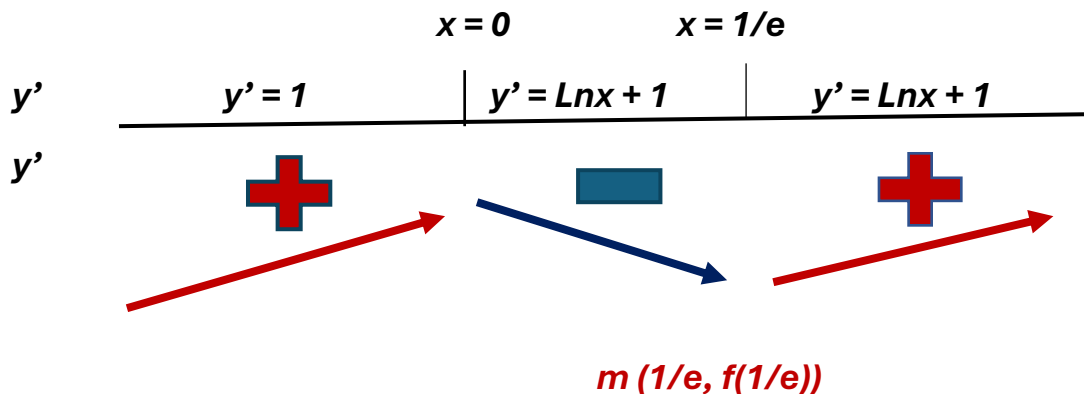
$$x \leq 0 \rightarrow f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1 > 0 \forall x \rightarrow \nexists \text{Extremos relativos}$$

$$x > 0 \rightarrow f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1 = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1}$$

Como vemos, hay un posible extremo relativo en $x = 1/e$. Como debemos de saber, será máximo si la segunda derivada es negativa para dicho valor y mínimo si la segunda derivada es positiva. Calculamos entonces la segunda derivada para dicho valor de la variable:

$$y' = \frac{1}{x} \rightarrow y' \left(\frac{1}{e} \right) = e > 0 \rightarrow \text{mínimo}$$

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son



c)

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) &= \int_1^2 x \ln x = \left| \begin{array}{l} \ln x = u \rightarrow \frac{1}{x} dx = du \\ x dx = dv \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{2^2}{2} \ln 2 - \frac{1^2}{2} \ln 1 \right) - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^2 = 2 \ln 2 - \left(1 - \frac{1}{4} \right) = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$$

Ejercicio 6 (Funciones)

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 e^{\frac{-1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función en $x = 0$**
- b) (0.5 puntos) Estudie si la función presenta algún tipo de simetría**
- c) (1 punto) Calcule la siguiente integral**

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6} dx$$

a)

Estudiamos las tres condiciones que debe de cumplir la función para que sea continua en $x = 0$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 e^{\frac{-1}{x^2}} = (0 \cdot e^{-\infty}) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 e^{\frac{-1}{x^2}} = (0 \cdot e^{-\infty}) = 0 \end{cases} \\ f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow 0 = 0 \end{cases}$$

Como vemos, se cumplen las tres condiciones, existe la función, existe el límite y ambos valores son iguales. Estudiamos la derivabilidad:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 e^{\frac{-1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{-1}{x^2}} = (0 \cdot e^{-\infty}) = 0$$

Por lo tanto, es derivable.

b)

Dado que a la izquierda y a la derecha de $x = 0$ la función es la misma, la función dada será simétrica si los es la función

$$y = x^3 e^{\frac{-1}{x^2}}$$

Para ello, comprobamos la relación entre $f(x)$ y $f(-x)$:

$$\begin{cases} f(x) = x^3 e^{\frac{-1}{x^2}} \\ f(-x) = (-x)^3 e^{\frac{-1}{(-x)^2}} = -x^3 e^{\frac{-1}{x^2}} = -f(x) \end{cases}$$

Como $f(x) = -f(-x)$ la función es impar o simétrica respecto del origen.

c)

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6} dx = \int_1^2 \frac{x^3 e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^6} dx = \int_1^2 \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^3} dx$$

Nos tendríamos que dar cuenta que **aparece una función, el exponente de la exponencial, y su derivada multiplicando al**

diferencial dx , por lo que esta integral, como se ha dicho en los apuntes de teoría, es por cambio de variable:

$$y = -\frac{1}{x^2} \rightarrow y' = -\frac{-1 \cdot 2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^3} dx &= \int_1^2 e^{\frac{-1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^3} dx = \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{x^2} = t \rightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow t = -1 \\ x = 2 \rightarrow t = -\frac{1}{4} \end{cases} \\ \frac{2}{x^3} dx = dt \rightarrow \frac{1}{x^3} = \frac{dt}{2} \end{array} \right| = \\ &= \int_{-1}^{-\frac{1}{4}} e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} e^t \Big|_{-1}^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{1}{4}} - e^{-1} \right) \end{aligned}$$