

Ejercicio 3 (Funciones)

Hallar el valor de a y b para que curva

$$y = x^3 + ax^2 + bx + 1$$

Tenga en el punto $(x_0, -1)$ un punto de inflexión y la pendiente de la tangente valga 1.

Tenemos información sobre la pendiente de la tangente en ese punto, la derivada, que vale **1**. También sabemos que es un punto de inflexión y, por lo tanto, anula la segunda derivada. Por ello, calculamos la primera y la segunda derivada y aplicamos esas condiciones:

$$y' = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow |y'(x_0) = 1| \rightarrow \mathbf{1 = 3x_0^2 + 2ax_0 + b \quad (1)}$$

Ecuación que, como no podría ser de otra manera, utilizaremos como tal para resolver el problema. Vamos ahora con el punto de inflexión:

$$y'' = 6x + 2a \rightarrow |y''(x_0) = 0| \rightarrow \mathbf{0 = 6x_0 + 2a \quad (2)}$$

Como vemos, tenemos dos ecuaciones, pero con tres incógnitas, **a , b y x_0** . Nos falta una tercera ecuación. Creemos que no es difícil ver que proviene del hecho de un dato que todavía no hemos tenido en cuenta: **el punto $(x_0, -1)$ pertenece a la función**. Por lo tanto, **ha de cumplir la ecuación que la define**:

$$y = x^3 + ax^2 + bx + 1 \rightarrow |y(x_0) = -1| \rightarrow \\ \mathbf{-1 = x_0^3 + ax_0^2 + bx_0 + 1 \quad (3)}$$

El sistema para resolver es entonces:

$$\begin{cases} \mathbf{1 = 3x_0^2 + 2ax_0 + b \quad (1)} \\ \mathbf{0 = 6x_0 + 2a \quad (2)} \\ \mathbf{-1 = x_0^3 + ax_0^2 + bx_0 + 1 \quad (3)} \end{cases}$$

Dado que no es un sistema lineal, no nos queda más remedio que utilizar el sistema de sustitución:

Despejamos **b** y **a** de las dos primeras ecuaciones y sustituimos en la tercera:

$$(2) a = -3x_0; (1) b = 1 - 3x_0^2 - 2ax_0 = 1 - 3x_0^2 - 2(-3x_0)x_0 \rightarrow \\ b = 1 + 3x_0^2$$

Y, sustituyendo en **(3)**

$$-1 = x_0^3 + (-3x_0)x_0^2 + (1 + 3x_0^2)x_0 + 1 \rightarrow \\ -2 = x_0^3 + x_0 \rightarrow x_0^3 + x_0 + 2 = 0$$

Descomponiendo por Ruffini:

$$x_0^3 + x_0 + 2 = (x_0 + 1)(x_0^2 - x_0 - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0^2 - x_0 - 2 = 0 \nexists x \end{cases}$$

La solución es entonces:

$$\begin{cases} x_0 = -1 \\ a = -3(-1) = 3 \\ b = 1 + 3(-1)^2 = 4 \end{cases}$$

Ejercicio 4 (Funciones)

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x} & x < 0 \\ x^2 - 4x + 3 & x \geq 0 \end{cases}$$

- a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.**
- b) (0.25 puntos) ¿Es $f(x)$ derivable en $x = 0$? Justifique la respuesta.**
- c) (0.75 puntos) Calcule, si existen las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.**
- d) (0.75 puntos) Determine para que $x \in (0, \infty)$ el punto de la gráfica en el que la pendiente de la recta tangente es nula y obtenga la ecuación de dicha tangente. En el punto obtenido, ¿alcanza la función algún extremo relativo? En caso afirmativo, clasifíquelo.**

a)

El único valor de x en el que la función puede ser no continua es el valor $x = 0$, que anula el denominador y además separa los intervalos de definición de la función. Para estudiar su continuidad, aplicamos la definición:

$$\begin{aligned} \exists f(0)? &\rightarrow f(0) = 0^2 - 0 + 3 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x+1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= x^2 - 4x + 3 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} &\neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \end{aligned}$$

No existe el límite, **la función es discontinua en $x = 0$** . La discontinuidad es de salto infinito, pues lo es uno de los límites.

b)

Al no ser función continua en $x = 0$, tampoco es derivable.

c)

Ya hemos visto que $x = 0$ es una **asíntota vertical**, pues uno de sus límites laterales es infinito.

Para calcular las asíntotas horizontales resolvemos los límites cuando la variable tiende a $\pm\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - 4x + 3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x} = 2 \rightarrow y = 2 \text{ A.H.}$$

Como vemos, hay una asíntota horizontal, $y = 2$, por la izquierda.

d)

Si la pendiente de la tangente es nula, la derivada es nula y es que estamos ante un punto crítico. Puede haber varios, estudiamos cada trozo por separado:

$$x < 0 \rightarrow y' = \frac{2 \cdot x - (2x + 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2} = 0 \rightarrow \nexists x$$

$$x \geq 0 \rightarrow y' = 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \in x \geq 0$$

Como vemos, en $x = 2$, se anula la pendiente de la derivada y, por lo tanto, la tangente es una recta horizontal. Como

$$x = 2 \rightarrow f(2) = -1 \rightarrow P(2, -1)$$

Y la ecuación de la tangente es:

$$y = -1$$

Si nos acordamos de que, por tener el coeficiente de x^2 positivo, se trata de una parábola cóncava, en forma de cuenco (en la

posición en que se ponen los cuencos para llenarlos, claro), y, por lo tanto, el punto **(2,-1)** es un mínimo. Si no, también podemos ver cuanto vale la segunda derivada. Si es positiva se trata de un mínimo y si es negativa es un máximo.

$$y'' = 2 > 0 \forall x \rightarrow \text{mínimo}$$