

Ejercicio 1 (Funciones)

Dada la curva

$$y = \frac{1}{4}x^2 + 4x + 4$$

Hallar hallar los puntos de la curva en los que la recta tangente a ella pase por el punto (0, 0)

Dar las ecuaciones de las rectas tangentes en esos puntos

Nos preguntan los puntos en los que se cumple cierta condición, que la recta tangente a esa curva en esos puntos pasen por origen de coordenadas. Lo que nos preguntan es el dato del que partimos, vamos a coger un punto arbitrario de la curva, calcularemos la tangente a la curva en ese punto y, por último, aplicaremos la condición de que esa recta pase por el origen:

Punto cualquiera:

$$(x_0, y_0) / y_0 = \frac{1}{4}x_0^2 + 4x_0 + 4 \quad (1)$$

La pendiente de la recta tangente es la derivada:

$$y' = \frac{1}{2}x + 4 \rightarrow y'(x_0) = \frac{1}{2}x_0 + 4 = m_{tg}$$

Definido el punto y se derivada, aplicamos la fórmula punto-pendiente de la ecuación de una recta:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow \begin{cases} (x_0, y_0) \\ m = \frac{1}{2}x_0 + 4 \end{cases} \rightarrow y - y_0 = \left(\frac{1}{2}x_0 + 4\right)(x - x_0)$$

Que es la ecuación de la tangente en cualquier punto genérico

Y, como sabemos que esa recta pasa por el punto (0, 0), ha de cumplir su ecuación:

$$0 - y_0 = \left(\frac{1}{2}x_0 + 4\right)(-x_0) \quad (2)$$

Siendo la segunda condición para el punto (x_0, y_0) ya que la primera es que pertenece a la función dada, como se ha escrito al principio:

$$y_0 = \frac{1}{4} x_0^2 + 4x_0 + 4 \quad (1)$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} -y_0 = -\frac{1}{2}x_0^2 - 4x_0 \\ y_0 = \frac{1}{4}x_0^2 + 4x_0 + 4 \end{cases} \rightarrow 0 = -\frac{1}{4}x_0^2 + 4 \rightarrow x_0 = \pm 4$$

Donde al sumarlas desaparece y_0 y podemos despejar x_0 . Los puntos pedidos serán los puntos de la función cuya abscisa es ± 4

$$x = 4 \rightarrow y = \frac{1}{4}4^2 + 4 \cdot 4 + 4 = 24 \rightarrow \mathbf{P(4, 24)}$$

$$x = -4 \rightarrow y = \frac{1}{4}(-4)^2 + 4 \cdot (-4) + 4 = -8 \rightarrow \mathbf{P(-4, -8)}$$

La segunda pregunta se refiere al cálculo de las ecuaciones de las rectas tangentes. Podíamos empezar desde el principio, calcular la derivada en cada uno de los puntos, que es la pendiente de la tangente, como hemos repetido hasta la saciedad. Pero dado que tenemos la ecuación de la tangente en un punto cualquiera (x_0, y_0) , no tenemos más que sustituir los puntos:

$$\{y - y_0 = \left(\frac{1}{2}x_0 + 4\right)(x - x_0) \rightarrow$$

$$\mathbf{P(4, 24)} \rightarrow y - 24 = \left(\frac{1}{2} \cdot 4 + 4\right)(x - 4) \rightarrow \mathbf{y = 6x}$$

$$\mathbf{P(-4, -8)} \rightarrow y + 8 = \left(\frac{1}{2} \cdot (-4) + 4\right)(x + 4) \rightarrow \mathbf{y = 2x}$$

Ejercicio 2 (Funciones)

Sea la función:

$$y = \frac{x^3}{(1+x)^2}$$

Hallar su dominio, asíntotas horizontales, verticales y oblicuas en el caso de que existan.

Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, y puntos de inflexión en el caso de que existan.

El dominio, en este caso, son todos los valores de los números reales excepto los que anulan el denominador:

$$(1+x)^2 = 0 \rightarrow 1+x = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow D: \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Asíntotas verticales:

La única candidata es la recta $x = -1$, ya que es el único valor que no pertenece al dominio y, al acercarnos a él, es posible que el cociente se acerque a más o menos infinito.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{(1+x)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{(1+x)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Efectivamente, la recta $x = -1$ es una asíntota vertical puesto que la función tiende a menos infinito si la variable x **tiende a -1**.

Asíntotas horizontales:

Como debemos de saber, son rectas $y = k$ si la función tiende a ese valor, k , cuando la variable tiende a menos infinito y a más infinito. Es la “altura” a la que tiende la función para valores muy “a la derecha” o “a la izquierda”.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(1+x)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{(1+x)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

Donde, como debemos de recordar, hemos aplicado la equivalencia para polinomios, **cuando** $x \rightarrow \pm\infty$, que nos dice que el polinomio es **equivalente al término de mayor grado**. Dado que los límites no han sido números reales, **no hay asíntotas horizontales**.

Asíntotas oblicuas:

Como debemos de recordar, también, las asíntotas oblicuas obedecen a la fórmula:

$$y = mx + n \rightarrow \begin{cases} m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \\ n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx \end{cases}$$

Donde el valor de **m** a de ser distinto de cero (sería entonces una recta horizontal, una asíntota horizontal ya estudiada) y ha de tomar, evidentemente, un valor real. **Si existen asíntotas horizontales** tales que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k$$

El límite

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Será cero y, entonces, **no existen asíntotas oblicuas**.

En nuestro caso, al no haber asíntotas horizontales, puede, o no, haber oblicuas. También, advertimos que, si tenemos una función polinómica, **suele tener asíntotas oblicuas si el grado del denominador es una unidad mayor que el grado del denominador**. El valor de **m** provendrá, en ese caso, de un límite racional en donde el grado del numerador es el mismo que el del denominador, siendo el límite entonces un número real.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{(1+x)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(1+x)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 \rightarrow \mathbf{m = 1}$$

Calculamos entonces el valor de **n**

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(1+x)^2} - 1 \cdot x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x(1+x)^2}{(1+x)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2 \rightarrow$$

$$\mathbf{n = -2}$$

Donde hemos operado el numerador y el denominador y nos hemos quedado, como ya hemos dicho, con los términos de mayor grado. Si la variable tiende a menos infinito los límites darían el mismo valor. Los límites pueden ser distintos, según la variable tienda a $\pm\infty$, rara vez en nuestro nivel. Si eso ocurre será en funciones exponenciales o con raíces cuadradas, pero, insistimos, no es lo normal ni mucho menos.

Por lo tanto, la asíntota oblicua es **$y = x - 2$**

Para contestar a la segunda pregunta debemos de recordar que una función es creciente para los valores de la variable que hacen la primera derivada positiva. Para los valores que hacen la primera derivada negativa, la función es decreciente. Por lo tanto, vamos a estudiar el signo de la primera derivada:

$$y' = \frac{3x^2(1+x)^2 - x^3 \cdot 2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{3x^2 + 6x^3 + 3x^4 - 2x^3 - 2x^4}{(1+x)^4} =$$

$$= \frac{x^4 + 4x^3 + 3x^2}{(1+x)^4} = \frac{x^2(x^2 + 4x + 3)}{(1+x)^4}$$

Los posibles máximos y mínimos anulan la derivada. En nuestro caso:

$$x^2(x^2 + 4x + 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$

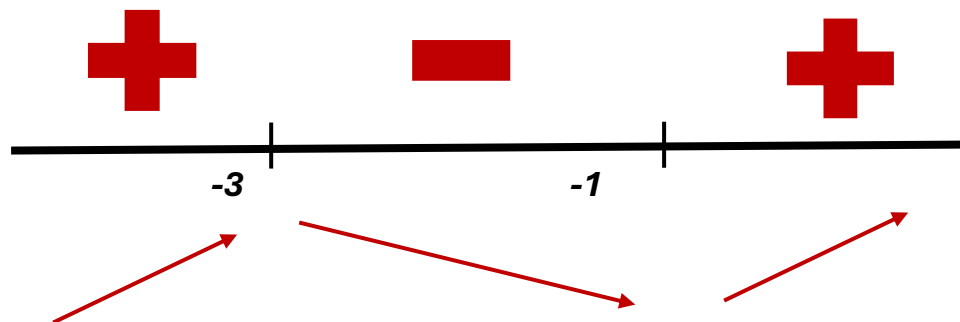
Pero, como queremos estudiar el signo de esta función deberíamos aplicar el método del que ya se ha hablado en los apuntes de teoría, igualar a cero también el denominador. Pero en este caso, creemos que

es fácil ver, es siempre positivo para cualquier valor de la variable, puesto que está elevado a la cuarta. También, el término x^2 del numerador es siempre positivo y, por todo ello, el signo de la derivada dependerá exclusivamente del signo del polinomio de segundo grado del denominador.

:

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} -3 \\ -1 \end{cases}$$

Y, como sabemos, el signo de ese polinomio sólo puede cambiar en esos valores de x :



$$x < -3 \quad |x = -10 \rightarrow y'(-10) > 0| \rightarrow y' > 0$$

$$-3 < x < -1 \quad |x = -2 \rightarrow y'(-2) < 0| \rightarrow y' < 0$$

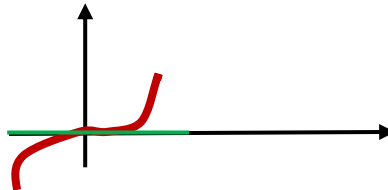
$$x > -1 \quad |x = 0 \rightarrow y'(0) > 0| \rightarrow y' > 0$$

Donde el signo se ha calculado para un valor cualquiera x de cada intervalo (sabemos que sólo puede cambiar en los valores que lo anulan, los valores calculados).

Dado que para el valor de $x = -3$ existe la función, recordando el dominio, hemos de deducir entonces **que representa a un máximo relativo de la función. Este punto tendrá de ordenada el valor que nos dé la función para ese valor de x . No sustituiremos en la derivada, sino en la función.** El punto cuya abscisa es $x = -1$ **no representa un mínimo**, puesto que no existe la función para ese valor, recordar que es una asíntota vertical.

El valor de $x = 0$ **anula la derivada, pero, por estar al cuadrado, el signo de la derivada no cambia en él. Por lo tanto, NO**

ES UN EXTREMO RELATIVO, es lo que se llama un punto de silla, de **tangente horizontal**. La función para $x = 0$ es $y = 0$. La “pinta” de la función en ese punto sería:



Con la tangente horizontal puesto que la derivada es cero.

Veremos entonces, en el apartado siguiente, que es un punto de inflexión, como vemos en la figura anterior.

Por último, calculamos los puntos de inflexión. Hemos de recordar que anulan la segunda derivada:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x^4 + 4x^3 + 3x^2}{(1+x)^4} \rightarrow y'' \\ &= \frac{(4x^3 + 12x^2 + 6x)(1+x)^4 - (x^4 + 4x^3 + 3x^2)4(1+x)^3}{(1+x)^8} \end{aligned}$$

En esta expresión, **debemos de sacar factor común en el numerador** porque si no el polinomio que nos queda es muy engorroso.

$$\begin{aligned} &\frac{(4x^3 + 12x^2 + 6x)(1+x)^4 - (x^4 + 4x^3 + 3x^2)4(1+x)^3}{(1+x)^8} = \\ &\frac{(1+x)^3[(4x^3 + 12x^2 + 6x)(1+x) - 4(x^4 + 4x^3 + 3x^2)]}{(1+x)^8} = \\ &\frac{4x^3 + 12x^2 + 6x + 4x^4 + 12x^3 + 6x^2 - 4x^4 - 16x^3 - 12x^2}{(1+x)^5} = \\ &\frac{6x^2 + 6x}{(1+x)^5} = \frac{6x(x+1)}{(1+x)^5} = \frac{6x}{(1+x)^4} \end{aligned}$$

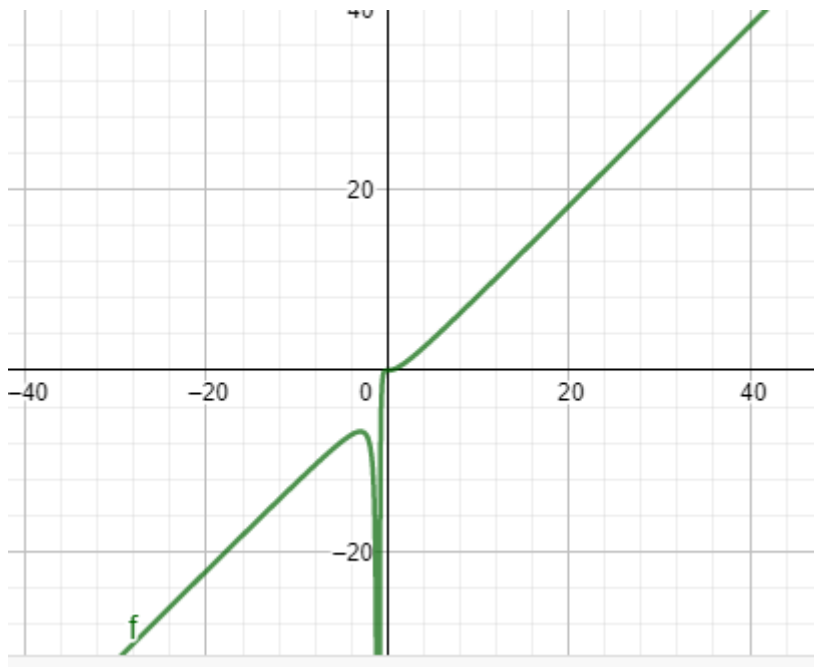
Y, dado que no nos preguntan los intervalos de concavidad y convexidad, sólo tenemos que calcular los valores de la variable x que

anulan el numerador, **puesto que el denominador es siempre positivo.**

$$6x = 0 \rightarrow x = 0$$

Aunque podríamos seguir el método indicado en varios ejemplos, en este caso es fácil ver que el numerador será negativo para valores de **x negativos, convexa**, y positivo para valores de **x positivos, cóncava**, en forma de cuenco como explica la etimología de la palabra.

Aunque no nos lo pregunten, y ya que disponemos de programas para dibujar la función, dicha función tendría esta gráfica:



Observar que en **x = 0** tenemos un punto de inflexión, aunque se anule la primera derivada. La curva en el primer cuadrante, como sabemos, tiene forma de cuenco, cóncava, aunque al dibujar en esa escala parece casi una recta.