

Ejercicio 1 (sistema ecuaciones con parámetro)

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro “a” y resolver en el caso de que sea compatible determinado y compatible indeterminado

$$\begin{cases} x + y + az = a \\ ax + ay + z = 1 \\ x + ay + z = a \end{cases}$$

El rango de la matriz de los coeficientes dependerá del valor de “a”. Como se ha visto en ellos ejemplos, ese rango dependerá según el valor determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = |1^a C \rightarrow 1^a C - 2^a C| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 1-a & a & 1 \end{vmatrix} =$$

Desarrollando por los adjuntos de la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 1-a & a & 1 \end{vmatrix} = (1-a) \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = (1-a)(1-a^2)$$

Si este determinante es nulo, el rango de la matriz de los coeficientes será menor que tres. Si es distinto de cero, el rango de la matriz será tres:

$$(1-a)(1-a^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} 1-a = 0 \rightarrow a = 1 \\ 1-a^2 = 0 \rightarrow a = \pm 1 \end{cases} \rightarrow a = \pm 1$$

Si

$$a \neq \pm 1 \rightarrow \text{ran} M = \text{ran} M^* = 3 = n^{\circ} \text{incog} \rightarrow \text{S.C.D}$$

Cuyas soluciones se calculan aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & a & 1 \end{vmatrix}}{(1-a)(1-a^2)}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}}{(1-a)(1-a^2)}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & a & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}}{(1-a)(1-a^2)}$$

En el caso de que $a = 1$ sustituimos ese valor en el sistema y calculamos los rangos aplicando Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pero, en este caso, no hace falta triangular porque todas las ecuaciones son iguales y podemos quitar la segunda y la tercera. Tenemos entonces un sistema de una ecuación con tres incógnitas. El rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada es uno. Como el número de incógnitas es tres, el sistema es compatible indeterminado con **$3 - 1 = 2$ parámetros**.

$$x + y + z = 1 \rightarrow \begin{cases} z = \gamma \\ y = \rho \\ x = 1 - y - z = 1 - \rho - \gamma \end{cases}$$

Y estas sus soluciones para cada par de valores de los parámetros.

En el caso de que $a = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{l} 2^a F \rightarrow 2^a F + 1^a F \\ 3^a F \rightarrow 3^a F - 1^a F \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Y se cumple

$$\text{Rang}M = \text{Rang}M^* = 2 < n^{\circ} \text{incg} = 3 \rightarrow S.C.I.$$

Número de parámetros = **$3 - 2 = 1$** . Elegimos la incógnita z como parámetro:

$$\begin{cases} z = \gamma \\ -2y + 2z = 0 \rightarrow y = z \rightarrow y = \gamma \\ x + y - z = -1 \rightarrow x = -1 - y + z \rightarrow x = -1 - \gamma + \gamma = -1 \end{cases}$$

Ejercicio 2 (sistema de ecuaciones dos parámetros)

Determina los valores de los parámetros a , b y c para los que

$(x, y, z) = (1, 2, 3)$ son soluciones del sistema:

$$\begin{cases} 2ax + by + z = 3c \\ 3x - 2by - 2cz = a \\ 5ax - 2y + cz = -4b \end{cases}$$

Según nos dice el enunciado, los valores dados de $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ satisfacen el sistema de ecuaciones. Por lo tanto, sustituyendo dichos valores en el sistema obtenemos:

$$\begin{cases} 2a + 2b + 3 = 3c \\ 3 - 4b - 6c = a \\ 5a - 4 + 3c = -4b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a + 2b - 3c = -3 \\ -a - 4b - 6c = -3 \\ 5a + 4b + 3c = 4 \end{cases}$$

Resultando, como vemos, un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas en a , b y c . Resolvemos por Gauss dada su sencillez. La segunda ecuación la colocamos primera en la matriz, ya que tiene un -1 en la incógnita a , lo que nos facilita el “hacer” ceros y triangular:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 & -3 \\ 2 & 2 & -3 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \left| \begin{array}{l} 2^a F \rightarrow 2^a F + (1^a F) \times 2 \\ 3^a F \rightarrow 3^a F + (1^a F) \times 5 \end{array} \right| = \\ & \begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -15 & -9 \\ 0 & -16 & -27 & -11 \end{pmatrix} = |2^a F / (-3)| = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -16 & -27 & -11 \end{pmatrix} = \\ & = |3^a F \rightarrow 3^a F + (2^a F) \times 2| = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -17 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow -17c = -5 \rightarrow \\ & c = \frac{5}{17} \rightarrow |2^a F| \rightarrow 2b + 5\left(\frac{5}{17}\right) = 3 \rightarrow b = \dots \end{aligned}$$

No calculamos el valor de b , aunque se ha planteado la ecuación de donde se despeja, ni de a porque pensamos que no es necesario para alguien que se está preparando la EBAU.

Ejercicio 3 (sistema de ecuaciones)

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro “a” y resuélvelo en el caso de que sea compatible.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + az = 8 \\ 2x - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$$

Como debemos de saber, la solución depende de los rangos de las matrices de los coeficientes y de la ampliada. Dado que hay un parámetro, para calcular el rango es mejor utilizar el método del determinante de mayor orden que se puede formar con la matriz. Lo que ocurre en este caso es que la matriz de los coeficientes **no es cuadrada** y contiene varios determinantes de tercer orden. Sin embargo, la matriz ampliada **sí es cuadrada**. Por lo tanto, vamos a calcular ese determinante de cuarto orden. Si es distinto de cero, el rango de la matriz ampliada tendrá rango cuatro y, dado que la matriz de los coeficientes no puede tener ese rango pues no contiene ningún determinante de cuarto orden, el sistema será incompatible.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & +2 & +a & 8 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & +1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2^a F \rightarrow 2^a F - 1^a F \\ 3^a F \rightarrow 3^a F + 2^a F \times (-2) \\ 4^a F \rightarrow 4^a F - 1^a F \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & +1 & 1 & 2 \\ 0 & +1 & a-1 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a-1 & 6 \\ -3 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (-3)(-2) \begin{vmatrix} 1 & a-1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

Donde se han hecho ceros en la primera columna y hemos después desarrollado por sus adjuntos. Después se ha sacado factor común de las filas donde era posible para simplificar lo posible. Podíamos seguir haciendo ceros para desarrollar por los adjuntos, pero también podemos aplicar Sarrus, ya que sólo hay un elemento del determinante que contiene el parámetro:

$$(-3)(-2) \begin{vmatrix} 1 & a-1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6[2 + a - 1 - (6 + 2a - 2)] = 6(-a - 3)$$

Este determinante será cero si:

$$-a - 3 = 0 \rightarrow a = -3$$

Por lo tanto, podemos decir:

$$\text{si } a \neq -3 \rightarrow \text{ran} M^* = 4 \neq \text{ran} M \leq 3 \rightarrow \text{SI}$$

De ser entonces compatible, sólo lo será en el caso de que

a = -3. Sustituimos entonces este valor y calculamos por Gauss los rangos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -15 & -15 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -15 & -15 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \end{pmatrix} \sim |4^a F \rightarrow 4^a F \times (15) + 3^a F \times (-8)| \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -15 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema es, como se ve, sistema compatible determinado puesto que el rango de las dos matrices es tres e igual al número de incógnitas. De la última ecuación:

$$-15z = -15 \rightarrow z = 1$$

Llevando ese valor de **z** a la segunda:

$$y - 4z = 6 \rightarrow y - 4 = 6 \rightarrow y = 10$$

Y sustituyendo en la primera esos valores:

$$x + 10 + 1 = 2 \rightarrow x = -9$$