

Ejercicio 1 (matrices)

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinar:

- a) Determina para que valor de a la matriz AB tiene inversa**
- b) Resuelve para $a = 0$ la ecuación matricial $ABX = 3I$, siendo I la matriz identidad.**

Para responder a la primera pregunta, debemos primero calcular la matriz **AB** :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+6 & 2a+4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Recordando el cálculo de la inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{adj}A)^T$$

Creemos que es fácil deducir que **una matriz es invertible si su determinante es distinto de cero**. Por lo tanto:

$$\begin{vmatrix} a+6 & 2a+4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = a+6 - (4a+8) = -3a-2$$

Para que exista entonces la inversa:

$$-3a-2 \neq 0 \rightarrow a \neq -\frac{2}{3}$$

Para resolver la segunda pregunta, despejamos primero de la ecuación la matriz **X** :

$$ABX = 3I \rightarrow (AB)X = 3I \rightarrow (AB)^{-1}(AB)X = (AB)^{-1}3I \rightarrow \\ X = (AB)^{-1}3I$$

Por lo tanto, tenemos que calcular la inversa de **AB** cuando **$a = 0$**

En el primer apartado ya hemos calculado la matriz **AB** en función de los valores de **a**:

$$AB = \begin{pmatrix} a+6 & 2a+4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = |a=0| = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} (adj AB)^T \rightarrow \begin{cases} |AB| = -2 \\ adj AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Siendo entonces la matriz **X**:

$$X = (AB)^{-1} 3I = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (determinantes)

Calcular sin desarrollar el valor del siguiente determinante, justificando los pasos dados.

$$\begin{vmatrix} 2 & b & c+a \\ 2 & a & b+c \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & b & c+a \\ 2 & a & b+c \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & b & c+a \\ 1 & a & b+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2^a F \rightarrow 2^a F - 1^a F \\ 3^a F \rightarrow 3^a F - 1^a F \end{vmatrix} =$$

$$2 \begin{vmatrix} 1 & b & c+a \\ 0 & a-b & b-a \\ 0 & c-b & b-c \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & b & c+a \\ 0 & a-b & -(a-b) \\ 0 & c-b & -(c-b) \end{vmatrix} =$$

$$2(a-b)(c-b) \begin{vmatrix} 1 & b & c+a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Donde en la primera igualdad se ha sacado factor común **2** de la primera columna y lo mismo en la penúltima igualdad, en donde se ha sacado factor común **(a - b)** de la segunda fila y **(c - b)** de la tercera fila. Por último, el valor del determinante es cero puesto que tiene dos filas iguales.

Ejercicio 3 (matrices)

Resuelve la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando en los dos miembros, a la izquierda, por la inversa de la matriz que multiplica a la matriz incógnita:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$I \cdot X = X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Tenemos que calcular entonces la inversa y después efectuar el producto dado para obtener la solución. Calculamos la inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (adjA)^T \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{cases} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ adjA = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Donde el determinante se ha desarrollado por los adjuntos de la segunda fila y la matriz adjunta aplicando las reglas comentadas en la teoría, no tiene más misterio que seguirlas. Aplicando entonces la fórmula de la inversa tenemos:

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Conviene comprobar que, efectivamente, se cumple:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

Así lo hemos hecho en este caso.

La solución, la matriz **X**, será, sustituyendo en **(1)**

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 (matrices)

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto) Calcule para que valores del parámetro k tiene inversa la matriz AB . Calcule la matriz inversa en el caso de $k = 1$**
- b) (1 punto) Calcule la matriz BA y discuta su rango en función del parámetro k**
- c) (0.5 puntos) En el caso de $k = 1$, escriba un sistema incompatible de tres ecuaciones con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes sea la matriz BA .**

a)

Calculamos la matriz **AB** :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 2 \\ k & k-1 \end{pmatrix}$$

Debemos de saber, como ya se ha dicho, que una matriz cuadrada tiene inversa si su determinante es distinto de cero. Calculamos, por lo tanto, su determinante:

$$|AB| = \begin{vmatrix} k & 2 \\ k & k-1 \end{vmatrix} = k(k-1) - 2k = k^2 - 3k = k(k-3)$$

Será nulo si:

$$k(k-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 3 \end{cases}$$

No tendrá inversa entonces si $k = 0$ o $k = 3$

Si **$k = 1$** su inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (adjA)^T = \begin{cases} |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \\ adjA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ (adjA)^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Podemos comprobar el resultado puesto que el producto de una matriz por su inversa es la matriz identidad:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = I$$

Efectivamente, no hemos cometido errores en los cálculos.

b)

Calculamos la matriz **BA**:

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+k & 0 & k-1 \\ 1-k & -2 & k+1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}$$

En el caso de que haya parámetros, el método mejor para discutir el rango de una matriz es en el que se aplica el teorema que nos dice que el rango de una matriz coincide con el orden del mayor determinante que contiene. Como en este caso contiene un único determinante de tercer orden vamos a calcular su valor, que dependerá del valor del parámetro **k**.

$$\begin{vmatrix} k+1 & 0 & k-1 \\ 1-k & -2 & k+1 \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix} = |2^a F \rightarrow 2^a F + 3^a F \cdot (-2)| =$$

$$\begin{vmatrix} k+1 & 0 & k-1 \\ -1-k & 0 & -k+1 \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix} = |adj 2^a C| = -(-1) \begin{vmatrix} k+1 & k-1 \\ -1-k & -k+1 \end{vmatrix} = 0$$

El determinante de tercer orden vale cero para cualquier valor de **k**. Nos hemos dado cuenta de que la segunda fila es la primera multiplicada por **(-1)**. También habríamos llegado al mismo resultado

desarrollando el último determinante de segundo orden y también, evidentemente, desarrollando el determinante primero de tercer orden

por la regla de Sarrus. Pensamos que el desarrollo por los adjuntos es más interesante y también aplicar las propiedades.

Sabemos entonces que el rango es menor que tres. Pero puede ser dos o incluso uno. El rango será uno sólo si **TODOS LOS DETERMINANTES DE SEGUNDO ORDEN VALEN CERO PARA UN MISMO VALOR DE k .**

Elegimos el primero de la esquina superior izquierda:

$$\begin{vmatrix} k+1 & 0 \\ 1-k & -2 \end{vmatrix} = (-2)(k+1) = 0 \rightarrow k = -1$$

De ser el rango uno, sólo puede ser si todos los demás determinantes de segundo orden se anulan para ese valor. Veamos:

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Y observamos que el determinante de la esquina inferior derecha

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{rango}(BA) = 2$$

c)

En el caso de que $k = 1$, la matriz queda:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y el sistema de ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Que, puesto en la forma tradicional:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a \\ 0 & -2 & 2 & b \\ 1 & -1 & 1 & c \end{pmatrix} \sim |3^a F$$

$$\rightarrow 3^a F \cdot (-2) + 1^a F | \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a \\ 0 & -2 & 2 & b \\ 0 & 2 & -2 & -2c + a \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim |3^a F \rightarrow 3^a F + 2^a F | \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a \\ 0 & -2 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & -2c + a + b \end{pmatrix}$$

Que será un sistema incompatible siempre que:

$$-2c + a + b \neq 0$$

Por lo que hay muchas soluciones.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 1 \\ c &= 2 \end{aligned}$$

Siendo el sistema:

$$\begin{aligned} 2x &= 1 \\ -2y + 2z &= 1 \\ x - y + z &= 2 \end{aligned}$$

Entre otras muchas posibilidades.