

Ejercicio 8 (3d)

Sean el plano

$$\pi \equiv x + y + z = 1$$

La recta

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 \end{cases} \lambda \in R$$

Y el punto

$$P(0, 1, 0)$$

- a) (0.5 puntos) Verifique que la recta está contenida en el plano y que el punto también pertenece al mismo plano.**
- b) (0.75 puntos) Halle una ecuación de la recta contenida en el plano π que pase por P y sea perpendicular a la recta r_1**
- c) (1.25 puntos) Calcule la ecuación de la recta r_2 , que pase por P y sea paralela a r_1 . Halle el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las dos rectas, r_1 y r_2 .**

a)

Para demostrar que el punto pertenece al plano basta con comprobar que las coordenadas del punto cumplen la ecuación del plano

$$\begin{array}{c} \pi \equiv x + y + z = 1 \\ P(0,1,0) \end{array} \rightarrow 0 + 1 + 0 = 1$$

Efectivamente, las coordenadas cumplen la ecuación del plano.

Comprobar que la recta está contenida en el plano se puede hacer de varias maneras. Nos parece que la más simple de ver es demostrar que dos de sus puntos están en el plano:

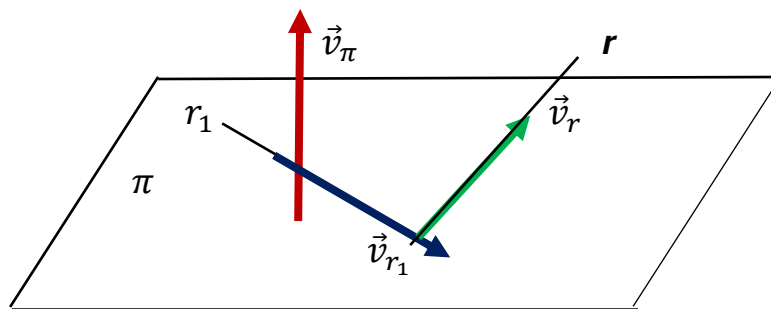
$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \rightarrow Q = (1, 1, -1) \\ \lambda = 1 \rightarrow R = (2, 0, -1) \end{cases} \rightarrow$$

$$x + y + z = 1 \rightarrow \begin{cases} Q(1,1,-1) \rightarrow 1 + 1 - 1 = 1 \\ R(2,0,-1) \rightarrow 2 + 0 - 1 = 1 \end{cases}$$

Efectivamente, los dos puntos cumplen la ecuación del plano y, por lo tanto, pertenecen a él.

b)

Para calcular la ecuación de una recta nos hace falta conocer un punto por el que pasa, en este caso el punto P conocido, y un vector que indique su dirección. En nuestro caso, y según la figura:



Deberíamos de ver que el vector de la recta pedida es perpendicular al vector de la recta r_1 , por condición del enunciado, y perpendicular al vector director del plano, por estar contenida en él. Su dirección será perpendicular a los dos vectores y, por lo tanto, la que marque su producto vectorial:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_\pi \times \vec{v}_{r_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1\vec{i} + 1\vec{j} - 2\vec{k}$$

Ya que el vector de la recta r_1 son los coeficientes del parámetro

$\lambda, \vec{v}_{r_1} = (1, -1, 0)$ y el vector director del plano son los coeficientes de las variables x, y y z .

Conocido el vector que indica su dirección y el punto por el que pasa, la recta r es:

$$r \equiv \left| \begin{matrix} P(0,1,0) \\ \vec{v}_r = (-1,1,-2) \end{matrix} \right| \rightarrow \frac{x-0}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-0}{-2}$$

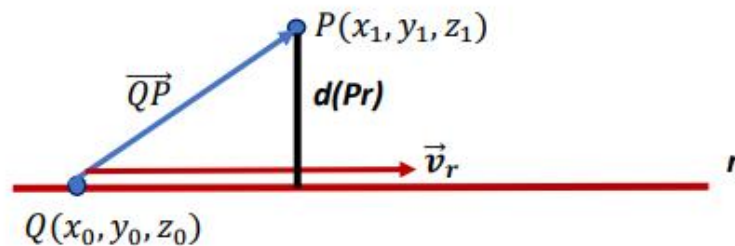
c)

Para calcular la recta r_2 ya tenemos el punto, P , y el vector que, por ser paralela a r_1 , será el mismo $\vec{v}_{r_1} = (1, -1, 0)$. Por lo tanto:

$$r_2 \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-0}{0}$$

El lado del cuadrado, dado que sus lados están en ambas rectas paralelas, será la distancia entre ellas. Para ello, calculamos la distancia entre un punto de ellas, P , perteneciente a r_2 , a la otra recta, r_1 . Para ello, aplicamos la fórmula de la distancia de un punto a una recta:

Sea la recta r y el punto P . La fórmula que utilizaremos para calcular la distancia del punto a la recta es:



La distancia del punto a la recta, $d(Pr)$, la calculamos según

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}$$

Donde el vector $\overrightarrow{QP}$ va desde un punto cualquiera de la recta, Q , al punto P .

En nuestro caso:

$$\begin{aligned}
 P(0,1,0) &\in r_2 \\
 Q(1,1,-1) &\in r_1 \rightarrow \overrightarrow{QP} = (-1,0,1) \rightarrow d = \frac{\left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \\
 \vec{v}_{r_1} &= (1,-1,0) \\
 &= \frac{|(1,1,1)|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \rightarrow A = L^2 = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$