

Ejercicio 7 (3d)

Con un dispositivo laser situado en el punto $P(1,1,1)$ se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta de ecuaciones

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = 90 \end{cases}$$

- a) (0.5 puntos) Calcule un vector director de r y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide en el plano $z = 0$**
- b) (1.25 puntos) Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo laser.**
- c) (0.75 puntos) Determine el ángulo entre el plano π de ecuación $x + y = 2$ y la recta r .**
- d)**

a)

Como debemos de saber por la teoría, el vector de la recta dada como intersección de dos planos lo podemos calcular de varias maneras. Una es resolviendo el sistema de las dos ecuaciones con dos incógnitas que representan la ecuación de la recta. Este sistema saldrá compatible indeterminado y el vector de la recta serán los coeficientes del parámetro. Este método es el más “intuitivo” pero es más corto el saber que, al ser la recta perpendicular a los dos planos de los que es intersección, su vector será perpendicular a los vectores directores de los planos. Por lo tanto, el vector de la recta se puede calcular como el producto vectorial de los dos vectores directores de los planos. Es el que utilizamos aquí:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot 1 - \vec{j} \cdot (-2) + \vec{k} \cdot 1 = (1, 2, 1)$$

La posición de la partícula cuando llegue al plano $z = 0$ será la intersección de su trayectoria con dicho plano, o lo que es lo mismo, la

intersección de la recta que representa su trayectoria con ese plano.
Por lo tanto, tenemos que resolver el sistema:

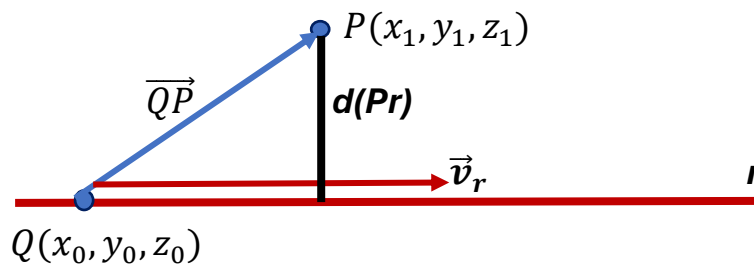
$$\begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = 90 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 90 \\ 2 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx |2^a F \rightarrow 2^a F + 1^a F \cdot (-2)| \approx$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 90 \\ 0 & -1 & 2 & -170 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3^a F \rightarrow z = 0 \\ 2^a F \rightarrow y = 170 \\ 1^a F \rightarrow x = 90 + y = 260 \end{cases}$$

b)

Tenemos que calcular la distancia entre un punto y una recta.
Según la teoría que debemos de conocer, esta viene dada por:

Sea la recta r y el punto P . La fórmula que utilizaremos para calcular la distancia del punto a la recta es:



La distancia del punto a la recta, $d(Pr)$, la calculamos según

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}$$

Donde el vector $\overrightarrow{QP}$ va desde un punto cualquiera de la recta, Q , al punto P .

El vector $\vec{v}_r$ es el vector director de la recta

En nuestro caso:

$$\vec{v}_r = (1, 2, 1)$$

El punto Q es un punto de la recta que calculamos dando un valor a cualquier variable en las ecuaciones de la recta:

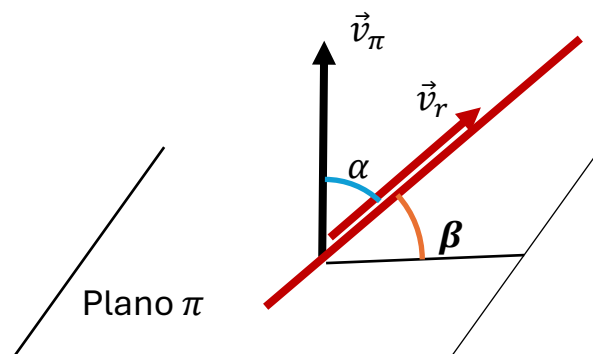
$$r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = 90 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1^{\text{a}}E \rightarrow 0 - y = 10 \rightarrow y = -10 \rightarrow \mathbf{Q} = (0, -10, -90) \\ 2^{\text{a}}E \rightarrow 0 - z = 90 \rightarrow z = -90 \end{cases}$$

El punto **P** es el que corresponde al laser **P (1, 1, 1)**. Entonces:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \overrightarrow{QP} = (P - Q) = (1, 11, 91) \\ \vec{v}_r = (1, 2, 1) \end{cases} \rightarrow d(P, r) &= \frac{|(1, 11, 91) \times (1, 2, 1)|}{|(1, 2, 1)|} = \\ &= \frac{\left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 11 & 91 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|(-171, 90, -9)|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{171^2 + 90^2 + 9^2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{37422}{6}} = \\ & d = \sqrt{6237} \text{ u.} \end{aligned}$$

c)

Para calcular el ángulo que forma un plano con una recta basta conocer el ángulo que forman el vector director de la recta y el vector director del plano, ángulo que llamamos α en la figura:



Como se observa, el ángulo entre la recta y el plano es β , complementario de α . Para calcular α aplicamos la fórmula que proviene del producto escalar y que nos da su coseno:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_r|} = \text{sen}\beta$$

Que, como debemos de saber al ser ángulos complementarios, coincide con el seno de β , que es el que nos piden:

$$\begin{matrix} \vec{v}_r = (1,2,1) \\ \vec{v}_\pi = (1,1,0) \end{matrix} \rightarrow \text{sen}\beta = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} \rightarrow$$

$$\text{sen}\beta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \beta = 60$$