

Ejercicio 6 (3d)

Sean las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 5 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- a) (1.5 puntos) Estudie la posición relativa de las rectas dadas y deduzca la distancia entre ellas.**
- b) (0.5 puntos) Determine una ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s**
- c) (0.5 puntos) Sean P y Q los puntos de las rectas r y s , respectivamente, que están contenidos en el plano de ecuación $z = 0$. Calcule una ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q**

a)

Según se ha visto en la teoría, para calcular la posición relativa de dos rectas necesitamos conocer sus vectores directores y un vector que vaya de un punto de una de ellas a otro punto de la otra. Si el rango de esos tres vectores es tres, las rectas se cruzan. Si el rango es dos se cortarían o son paralelas. Veamos.

$$r \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$P_r \equiv y = 0 \rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \\ -2z + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow P_r = \left(-2, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$s \equiv \begin{cases} \vec{v}_s = (-2, 2, 1) \\ P_s = (2, 5, 0) \end{cases}$$

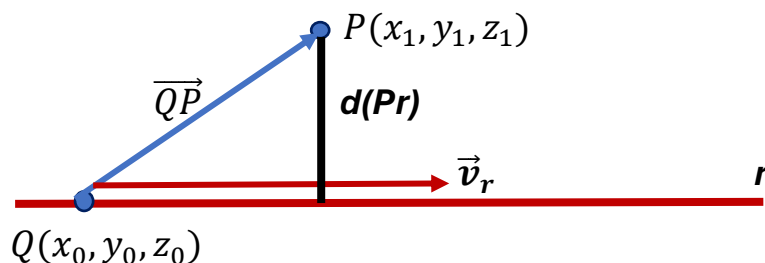
Aplicando lo dicho en el primer párrafo:

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (-2, 2, 1) \\ \vec{v}_s = (-2, 2, 1) \\ \overrightarrow{P_r P_s} = \left(4, 5, -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Vemos que los dos vectores directores son el mismo y, dado que el vector que va de un punto de la recta r a otro punto de la recta s no es paralelo a los directores, en ese caso las dos rectas serían la misma, **las dos rectas son paralelas**.

Para calcular la distancia entre ambas basta entonces con calcular la distancia de un punto de una de ellas a la otra. Vamos a coger el punto calculado de la recta s y su distancia a la recta r . Para ello aplicamos la fórmula de la distancia de punto a recta:

Sea la recta r y el punto P . La fórmula que utilizaremos para calcular la distancia del punto a la recta es:



La distancia del punto a la recta, $d(Pr)$, la calculamos según

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}$$

En nuestro caso:

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{P_r P_s} = \left(4, 5, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow d = \frac{\left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 5 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|(6, 3, 18)|}{3} \rightarrow$$

$$\vec{v}_r = (-2, 2, 1)$$

$$d = \frac{\sqrt{6^2 + 3^2 + 18^2}}{3} = \frac{\sqrt{369}}{3} = \sqrt{41} u$$

b)

Ecuación del plano que contiene a las dos rectas. Conocemos dos vectores en los que se apoya, $\vec{v}_r$ y $\overrightarrow{P_r P_s}$, y un punto por el que pasa, cualquiera de las dos rectas, por ejemplo $P_s = (2, 5, 0)$. Aplicando la teoría, la ecuación de este plano será:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_r P_s} &= \left(4, 5, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z-0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \\ \vec{v}_r &= (-2, 2, 1) \end{aligned}$$

$$(x-2)(-6) - (y-5)(-3) + (z-0)(-18) = 0 \rightarrow$$

$$-6x + 3y - 18z - 3 = 0 \rightarrow \mathbf{2x - y + 6z + 1 = 0}$$

c)

Sean **P** y **Q** los puntos de las rectas **r** y **s**, respectivamente, que están contenidos en el plano de ecuación **z = 0**. Calcule una ecuación de la recta que pasa por los puntos **P** y **Q**.

Calculamos la intersección de ambas rectas con el plano **z = 0** para conocer los puntos **P** y **Q**

$$P \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \rightarrow x = -1 \\ y - 2z + 1 = 0 \rightarrow y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \mathbf{P = (-1, -1, 0)}$$

$$Q \equiv \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 5 + 2t \\ z = t \end{cases} \rightarrow t = 0 \rightarrow \mathbf{Q = (2, 5, 0)}$$

La ecuación de la recta pedida, que llamaremos **t**, tendrá como vector director el vector $\overrightarrow{PQ}$ y pasa por cualquier punto de los dos. Elegimos el punto **P**:

$$\overrightarrow{PQ} = (3, 6, 0) \parallel (1, 2, 0) \rightarrow \mathbf{t \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0}}$$