

Ejercicio 4 (3d)

Estudia según el valor del parámetro “a” la posición relativa de las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} ax + 3y - 2z = 12 \\ 2x + 5y - z = 6 \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 5 + 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 6 + 4\lambda \end{cases}$$

Como debemos de saber, los vectores de ambas rectas son imprescindibles para el estudio de su posición relativa. Que haya un parámetro, **a**, no nos debe de preocupar, trabajamos con él como lo que es, un número como otro cualquiera.

El vector de la recta **s**, al estar en paramétricas es inmediato, los coeficientes del parámetro:

$$\vec{v}_s = (3, -1, 4)$$

El vector de la recta **r**, como en el problema anterior, será el producto de los vectores directores de los planos que la definen:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - \vec{j}(-a + 4) + (5a - 6)\vec{k} = (7, a - 4, 5a - 6)$$

Para saber si se cruzan hemos de utilizar estos dos vectores y un vector cualquiera que vaya de un punto de una de ellas a otro punto de la otra.

$$r \equiv \begin{cases} ax + 3y - 2z = 12 \\ 2x + 5y - z = 6 \end{cases} \rightarrow |x = 0| \rightarrow \begin{cases} 3y - 2z = 12 \\ 5y - z = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -6 \end{cases}$$

Donde se ha dado a la **x** el valor de cero para que no aparezca el valor del parámetro y simplificar. Un punto de la recta **r** es, por lo tanto, el punto

$$P_r = (0,0,-6)$$

Un punto de la recta **s**, como debemos de saber, es el formado por los números que no están multiplicados por el valor del parámetro en la ecuación paramétrica. Por lo tanto:

$$\begin{cases} P_r = (0,0,-6) \\ P_s = (5,1,6) \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{P_r P_s} = (5, 1, 12)$$

Si los tres vectores, los dos directores de las dos rectas y este último, forman un sistema de vectores libres, si el rango de la matriz formada por ellos es tres, las dos rectas se cruzarán. Entonces calculamos el determinante formado por los tres. Si su valor es distinto de cero, las rectas se cruzarán.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 7 & a-4 & a-6 \\ 5 & 1 & 12 \end{vmatrix} \\ = 36(a-4) + 28 - 5(a-6) \\ - [20(a-4) + 3(a-6) - 84] = \\ = 8a + 240 = 0 \rightarrow a = 30$$

Podemos decir entonces que si:

$$a \neq 30$$

Las rectas se cruzan.

Si **$a = 30$** las rectas se cortan, **salvo que sean paralelas**. Vemos entonces si son o no son paralelas:

$$a = 30 \rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (7,26,144) \\ \vec{v}_s = (3,-1,4) \end{cases} \rightarrow \frac{7}{3} \neq \frac{26}{-1} \neq \frac{144}{4}$$

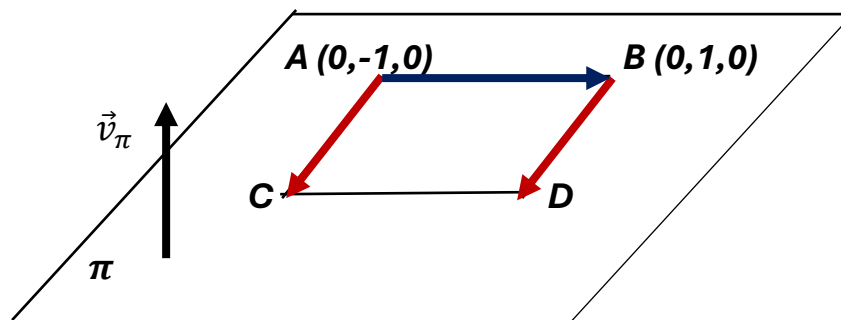
Y dado que los vectores no tienen las componentes proporcionales, las rectas no son paralelas y, por lo tanto, **se cortan**.

Ejercicio 5 (3d)

Sea el plano $\pi \equiv z = x$ y los puntos $A(0, -1, 0)$ y $B(0, 1, 0)$ pertenecientes al plano.

- a) (1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices contiguos de un cuadrado cuyos otros dos vértices, C y D , están también en el plano, encuentre las coordenadas de C y D .**
- b) (1.25 puntos) Ídem si los vértices A y B son vértices opuestos del cuadrado**

Una figura creemos que es fundamental. La vamos a dibujar “genéricamente”, sin tener en cuenta las posiciones “reales” del enunciado para poder resolver el problema cualquiera que sea la situación. En un segundo apartado veremos, por la simplicidad de los datos, que este problema se puede hacer “visualmente”.



Si conocemos los vectores $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ y, dado que conocemos los puntos A y B , podremos conocer los puntos C y D . En la figura, creemos que se ve bien, que el vector $\overrightarrow{AC}$ es perpendicular a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\vec{v}_\pi$. Por lo tanto, **su dirección será la de su producto vectorial**. Su módulo será el mismo que el del vector $\overrightarrow{AB}$,

pues se trata de un cuadrado. Calculamos primero su dirección, después tendremos en cuenta su módulo.

$$\overrightarrow{AB} = (0,2,0) \vec{v}_\pi(-1,0,1) \rightarrow \overrightarrow{AC} \parallel \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2,0,2) \rightarrow$$

Este vector indica la dirección de los vectores que buscamos. Por comodidad, podemos trabajar con un vector paralelo y del mismo sentido, dividiendo sus componentes entre 2. Esto, claramente, no se puede hacer con un punto.

$$(2,0,2) \parallel (1,0,1) = \vec{r}$$

Para calcular el vector $\overrightarrow{AC}$, el mismo que $\overrightarrow{BD}$, nos hace falta por último tener en cuenta que su módulo ha de ser, como se ha dicho, el mismo que el del vector $\overrightarrow{AB}$. Por ello, los podemos calcular como el producto de su módulo por un vector unitario en su dirección y sentido. Un vector unitario en su dirección, la del vector $\vec{r}$, será:

$$\vec{u}_{\vec{r}} = \frac{1}{|\vec{r}|} \vec{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1,0,1)$$

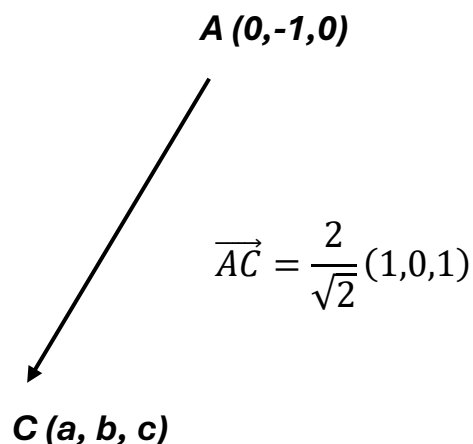
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2} = 2$$

Entonces:

$$\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \vec{u}_{\vec{r}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1,0,1)$$

Conocido el vector, podemos calcular el extremo **C**:

A (0,-1,0)



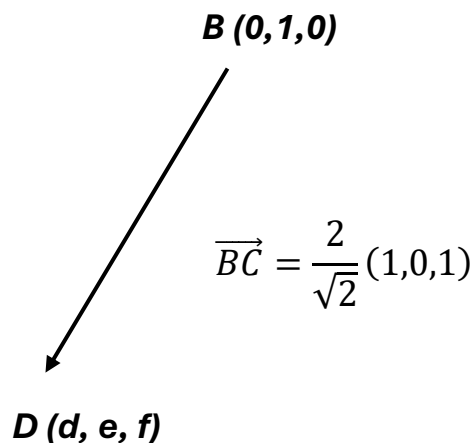
$$\overrightarrow{AC} = \frac{2}{\sqrt{2}} (1,0,1)$$

C (a, b, c)

$$\frac{2}{\sqrt{2}}(1,0,1) = (a-0, b+1, c-0) \rightarrow \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2}} = a \\ 0 = b+1 \rightarrow b = -1 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} = c \end{cases}$$

$$\mathbf{C} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, -1, \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = (\sqrt{2}, -1, \sqrt{2})$$

Para calcular D, seguimos el mismo procedimiento



$\mathbf{B}(0,1,0)$

$\overrightarrow{BC} = \frac{2}{\sqrt{2}}(1,0,1)$

$\mathbf{D}(d,e,f)$

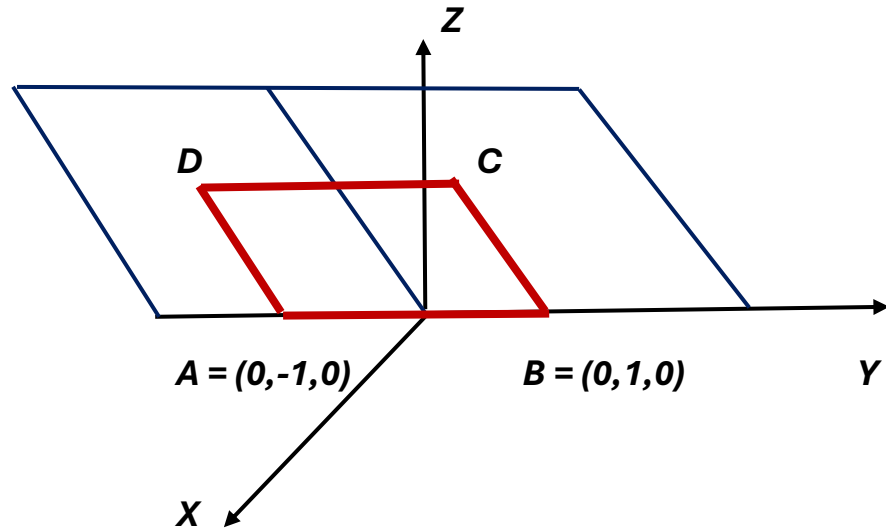
$$\frac{2}{\sqrt{2}}(1,0,1) = (d-0, e-1, f-0) \rightarrow \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2}} = d \\ 0 = e-1 \rightarrow e = 1 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} = f \end{cases}$$

$$\mathbf{D} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, 1, \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = (\sqrt{2}, 1, \sqrt{2})$$

Queremos decir que habría otro cuadrado solución, con los puntos **C** y **D** “***hacia el otro lado***”, eligiendo el vector producto vectorial que nos ha permitido conocer $\vec{r}$ en sentido contrario. En ese caso, el vector sería

$$\vec{r} = (-1, 0, -1)$$

Como hemos dicho al principio, si dibujamos según unos ejes coordenados los datos del problema, y por su simplicidad en este caso, podemos resolver el problema de una manera más “visual”:



De la figura podemos deducir fácilmente que la coordenada “y” del vértice **D** es **y = -1** y la del vértice **C** es **y = 1**. Como además tienen que estar en el plano **z = x**, son puntos de la forma:

$$\begin{aligned} C &= (x, 1, x) \\ D &= (x, -1, x) \end{aligned}$$

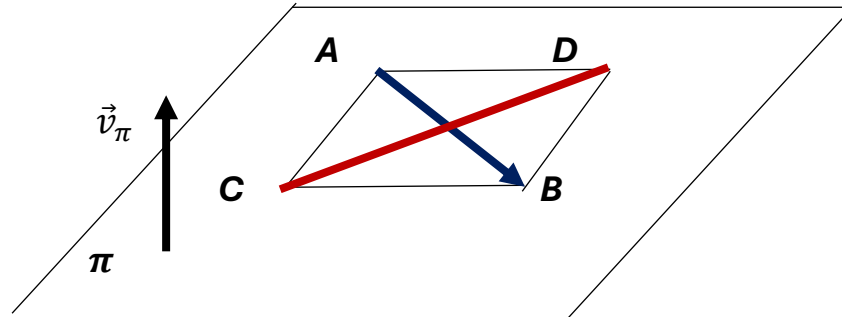
Para calcular el valor de “x”, aplicamos a la condición de que sus distancias a los otros dos vértices son iguales al lado del cuadrado, **L = 2** calculado anteriormente:

$$\begin{aligned} d(CB) = 2 &\rightarrow \overline{CB} = (x, 0, x) \rightarrow \sqrt{2x^2} = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ d(DA) = 2 &\rightarrow \overline{DA} = (x, 0, x) \rightarrow \sqrt{2x^2} = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

El valor positivo corresponde a los puntos dibujados. El valor negativo serían los vértices si el cuadrado está “por detrás”, también válidos. Como respuesta tenemos entonces:

$$\begin{aligned} C &= (\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}) \text{ o } (-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2}) \\ D &= (\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}) \text{ o } (-\sqrt{2}, -1, -\sqrt{2}) \end{aligned}$$

b)



Los puntos buscados, **C** y **D**, hemos de ver que está en la recta **CD perpendicular a la diagonal AB**. La ecuación de esta recta será, por ello, fundamental para calcularlos. Como también esta recta está en el plano, su vector ha de ser perpendicular a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\vec{v}_\pi$. Por lo tanto, tendrá como vector director al producto vectorial de ambos vectores:

$$\overrightarrow{AB} = (0,2,0) \rightarrow \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2,0,2)$$

Como además pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ su ecuación será:

$$\vec{v}_r = (2,0,2) \parallel (1,0,1)$$

$$PM(\overline{AB}) = \left(\frac{0+0}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{0+0}{2} \right) = (0,0,0) \rightarrow r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$$

Los puntos **C** y **D** están sobre esa recta. **Los pondremos entonces en paramétricas:**

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \rightarrow C y D \equiv (t, 0, t)$$

Por último, para calcular el valor del parámetro “t” aplicaremos la condición de que su distancia al centro del cuadrado, el

punto **$PM = (0,0,0)$** es la misma que la distancia de los puntos **A** y **B** a **PM** :

$$d(A, PM) = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 0^2} = 1 \rightarrow$$

$$d(C, PM) = d(D, PM) = 1 \rightarrow \sqrt{t^2 + 0^2 + t^2} = 1 \rightarrow 2t^2 = 1 \rightarrow$$

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \begin{aligned} C &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ D &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$