

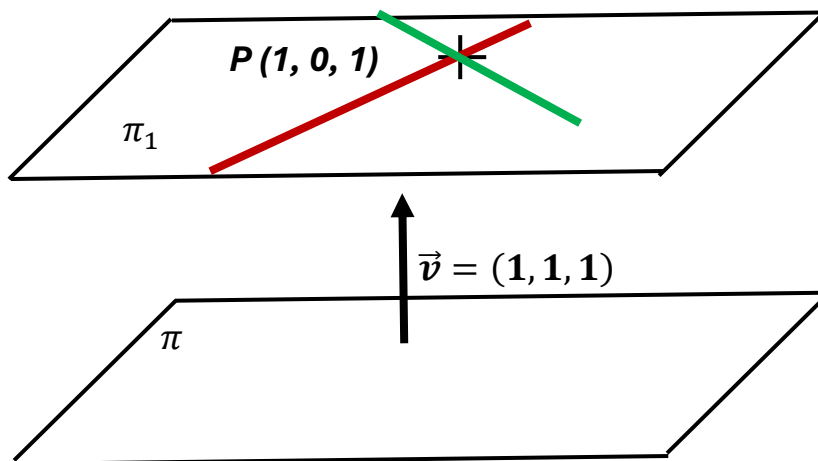
Ejercicio 1 (3d)

Halla la ecuación de una recta paralela al plano

$$\pi \equiv x + y + z = 0$$

Y que contenga al punto $P(1, 0, 1)$. ¿Es única dicha recta?

Un dibujo que refleje la situación, con la solución gráfica, aunque después no sepamos llegar a ella matemáticamente, es muy clarificador. Dibujamos el plano, no hace falta dibujar los tres ejes, y un punto exterior a él, el punto P . Sabemos que es exterior a él porque no cumple la ecuación del plano:



Deberíamos ver que las rectas dibujadas en rojo y verde, por estar en un plano paralelo al dado, son también paralelas a él. Entonces, cualquier recta que pase por el punto **P y esté contenida en el plano π_1** , será solución. Por lo tanto, cualquier vector **perpendicular al vector director del plano π** , $\vec{v} = (1, 1, 1)$ será el vector de una recta paralela al plano π .

Un vector perpendicular al dado será:

$$\vec{t} = (a, b, c) \setminus \vec{v} \cdot \vec{t} = 0 \rightarrow a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 = 0$$

Una solución cualquiera, dado que es un sistema compatible indeterminado será:

$$a = 0, b = 1 \rightarrow 0 + 1 + c = 0 \rightarrow c = -1 \rightarrow \vec{t} = (0, 1, -1)$$

Y la ecuación de la recta:

$$r \equiv \begin{cases} P(1,0,1) \\ \vec{t} = (0,1,-1) \end{cases} \rightarrow \frac{x-1}{0} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

Ejercicio 2 (3d)

Determina los valores de los parámetros a y b para que el plano π contenga a la recta r :

$$\pi \equiv ax + y + z = b \quad r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Deberíamos entender que, si todos los puntos de intersección de ambos conjuntos son los puntos de la recta, el sistema de ecuaciones formado por ellos ha de ser un sistema compatible indeterminado, con un parámetro (una recta en paramétricas depende de un parámetro). Representamos entonces el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & b \end{pmatrix}$$

Para que sea compatible indeterminado, el determinante de las incógnitas ha de valor cero (en caso contrario, el sistema sería compatible determinado). Por lo tanto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 1 + a - (-2a + 1 - 1) = 3a - 3 = 0 \rightarrow a = 1$$

Con el valor de a calculado, vemos como queda el sistema y lo resolvemos por Gauss para imponer la condición de que sea **SCI**, de ahí calcularemos el valor de b .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} = \begin{array}{l} 2^a F \rightarrow 2^a F + 1^a F \\ 3^a F \rightarrow 3^a F - 1^a F \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

Para que el sistema tenga solución, **SCI** evidentemente, la última fila ha de ser nula. Por lo tanto:

$$b - 1 = 0 \rightarrow b = 1$$

La solución es, entonces:

$$a = 1$$

$$b = 1$$

Ejercicio 3 (3d)

Determina, según los valores del parámetro “a”, la posición relativa de la recta:

$$r \equiv \begin{cases} ax + 3y - 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$$

Y el plano

$$6x + 5y - 3z = 2$$

Creemos que es fácil ver que, entre otras maneras, podemos responder resolviendo el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que forman

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & -3 & 2 \\ a & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Y, como debemos de recordar, la solución al sistema dependerá del valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -3 \\ a & 3 & -2 \end{vmatrix} = -20 + 18 + 3a - (5a - 18 + 12) = -2a + 4$$

$$\begin{cases} \text{Si } -2a + 4 \neq 0 \rightarrow a \neq 2 \text{ } \text{ran}M = \text{ran}M^* = 3 = n^{\circ} \text{ inc.} \rightarrow S.C.D \text{ (1)} \\ \text{Si } -2a + 4 = 0 \rightarrow a = 2 \text{ } \text{ran}M < 3 \text{ (2)} \end{cases}$$

El caso **(1)** corresponde, como se dice, a un sistema compatible determinado, dado que los rangos de la matriz de los coeficientes y de la ampliada son iguales y coincide con el número de incógnitas, por lo que la recta y el plano se cortan en un punto.

En el caso **(2)** el rango de la matriz de los coeficientes es menor que tres, pero no podemos todavía saber cuál es y tampoco el

de la matriz ampliada. Como el valor de **a** es conocido, lo resolvemos por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2^a F \rightarrow 2^a F + 1^a F \times (-3) \\ 3^a F \rightarrow 3^a F - 1^a F}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -6 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= |3^a F \rightarrow 3^a F \times (-2) + 2^a F| = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de los coeficientes es, como vemos, dos. Sin embargo, el rango de la matriz ampliada es tres, por lo que es un sistema incompatible. Ya que no hay intersección entre el plano y la recta, podemos decir que la recta y el plano son paralelos.

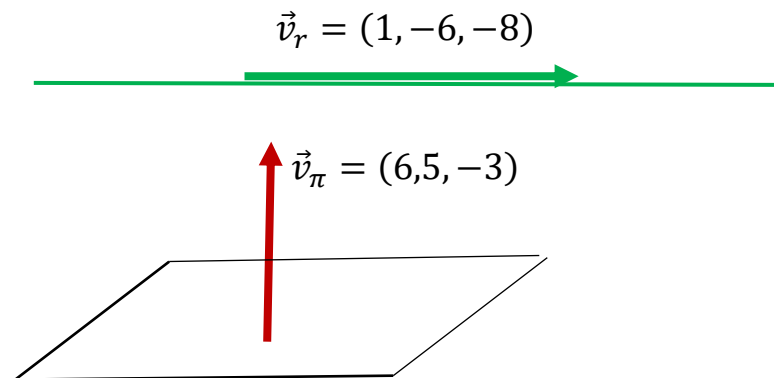
Podemos deducir esta característica geométrica, también, calculando los vectores de ambos conjuntos. Para ese valor de "**a**" la ecuación de la recta, dada como intersección de dos planos es:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$$

Dado que la recta es perpendicular a ambos planos, podemos calcular su vector como producto vectorial de los vectores directores de ambos:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\vec{i} - 6\vec{j} - 8\vec{k}$$

Como la recta es paralela al plano, su vector, el vector calculado anteriormente, ha de ser perpendicular al vector director del plano, como se ve en la figura



Efectivamente, observamos que su producto escalar es cero, por lo que ambos vectores son perpendiculares.