

Ejercicio 1 (Funciones)

Dada la curva

$$y = \frac{1}{4}x^2 + 4x + 4$$

Hallar hallar los puntos de la curva en los que la recta tangente a ella pase por el punto (0, 0)

Dar las ecuaciones de las rectas tangentes en esos puntos

Nos preguntan los puntos en los que se cumple cierta condición, que la recta tangente a esa curva en esos puntos pasen por origen de coordenadas. Lo que nos preguntan es el dato del que partimos, vamos a coger un punto arbitrario de la curva, calcularemos la tangente a la curva en ese punto y, por último, aplicaremos la condición de que esa recta pase por el origen:

Punto cualquiera:

$$(x_0, y_0) / y_0 = \frac{1}{4}x_0^2 + 4x_0 + 4 \quad (1)$$

La pendiente de la recta tangente es la derivada:

$$y' = \frac{1}{2}x + 4 \rightarrow y'(x_0) = \frac{1}{2}x_0 + 4 = m_{tg}$$

Definido el punto y se derivada, aplicamos la fórmula punto-pendiente de la ecuación de una recta:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow \begin{cases} (x_0, y_0) \\ m = \frac{1}{2}x_0 + 4 \end{cases} \rightarrow y - y_0 = \left(\frac{1}{2}x_0 + 4\right)(x - x_0)$$

Que es la ecuación de la tangente en cualquier punto genérico

Y, como sabemos que esa recta pasa por el punto (0, 0), ha de cumplir su ecuación:

$$0 - y_0 = \left(\frac{1}{2}x_0 + 4\right)(-x_0) \quad (2)$$

Siendo la segunda condición para el punto (x_0, y_0) ya que la primera es que pertenece a la función dada, como se ha escrito al principio:

$$y_0 = \frac{1}{4} x_0^2 + 4x_0 + 4 \quad (1)$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} -y_0 = -\frac{1}{2}x_0^2 - 4x_0 \\ y_0 = \frac{1}{4}x_0^2 + 4x_0 + 4 \end{cases} \rightarrow 0 = -\frac{1}{4}x_0^2 + 4 \rightarrow x_0 = \pm 4$$

Donde al sumarlas desaparece y_0 y podemos despejar x_0 . Los puntos pedidos serán los puntos de la función cuya abscisa es ± 4

$$x = 4 \rightarrow y = \frac{1}{4}4^2 + 4 \cdot 4 + 4 = 24 \rightarrow P(4, 24)$$

$$x = -4 \rightarrow y = \frac{1}{4}(-4)^2 + 4 \cdot (-4) + 4 = -8 \rightarrow P(-4, -8)$$

La segunda pregunta se refiere al cálculo de las ecuaciones de las rectas tangentes. Podíamos empezar desde el principio, calcular la derivada en cada uno de los puntos, que es la pendiente de la tangente, como hemos repetido hasta la saciedad. Pero dado que tenemos la ecuación de la tangente en un punto cualquiera (x_0, y_0) , no tenemos más que sustituir los puntos:

$$\{y - y_0 = \left(\frac{1}{2}x_0 + 4\right)(x - x_0) \rightarrow$$

$$P(4, 24) \rightarrow y - 24 = \left(\frac{1}{2} \cdot 4 + 4\right)(x - 4) \rightarrow y = 6x$$

$$P(-4, -8) \rightarrow y + 8 = \left(\frac{1}{2} \cdot (-4) + 4\right)(x + 4) \rightarrow y = 2x$$

Ejercicio 2 (Funciones)

Sea la función:

$$y = \frac{x^3}{(1+x)^2}$$

Hallar su dominio, asíntotas horizontales, verticales y oblicuas en el caso de que existan.

Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, y puntos de inflexión en el caso de que existan.

El dominio, en este caso, son todos los valores de los números reales excepto los que anulan el denominador:

$$(1+x)^2 = 0 \rightarrow 1+x = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow D: \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Asíntotas verticales:

La única candidata es la recta $x = -1$, ya que es el único valor que no pertenece al dominio y, al acercarnos a él, es posible que el cociente se acerque a más o menos infinito.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{(1+x)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{(1+x)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Efectivamente, la recta $x = -1$ es una asíntota vertical puesto que la función tiende a menos infinito si la variable x **tiende a -1**.

Asíntotas horizontales:

Como debemos de saber, son rectas $y = k$ si la función tiende a ese valor, k , cuando la variable tiende a menos infinito y a más infinito. Es la “altura” a la que tiende la función para valores muy “a la derecha” o “a la izquierda”.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(1+x)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{(1+x)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

Donde, como debemos de recordar, hemos aplicado la equivalencia para polinomios, **cuando** $x \rightarrow \pm\infty$, que nos dice que el polinomio es **equivalente al término de mayor grado**. Dado que los límites no han sido números reales, **no hay asíntotas horizontales**.

Asíntotas oblicuas:

Como debemos de recordar, también, las asíntotas oblicuas obedecen a la fórmula:

$$y = mx + n \rightarrow \begin{cases} m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \\ n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx \end{cases}$$

Donde el valor de **m** a de ser distinto de cero (sería entonces una recta horizontal, una asíntota horizontal ya estudiada) y ha de tomar, evidentemente, un valor real. **Si existen asíntotas horizontales** tales que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k$$

El límite

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Será cero y, entonces, **no existen asíntotas oblicuas**.

En nuestro caso, al no haber asíntotas horizontales, puede, o no, haber oblicuas. También, advertimos que, si tenemos una función polinómica, **suele tener asíntotas oblicuas si el grado del denominador es una unidad mayor que el grado del denominador**. El valor de **m** provendrá, en ese caso, de un límite racional en donde el grado del numerador es el mismo que el del denominador, siendo el límite entonces un número real.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{(1+x)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(1+x)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 \rightarrow \mathbf{m = 1}$$

Calculamos entonces el valor de **n**

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(1+x)^2} - 1 \cdot x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x(1+x)^2}{(1+x)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2 \rightarrow$$

$$\mathbf{n = -2}$$

Donde hemos operado el numerador y el denominador y nos hemos quedado, como ya hemos dicho, con los términos de mayor grado. Si la variable tiende a menos infinito los límites darían el mismo valor. Los límites pueden ser distintos, según la variable tienda a $\pm\infty$, rara vez en nuestro nivel. Si eso ocurre será en funciones exponenciales o con raíces cuadradas, pero, insistimos, no es lo normal ni mucho menos.

Por lo tanto, la asíntota oblicua es **$y = x - 2$**

Para contestar a la segunda pregunta debemos de recordar que una función es creciente para los valores de la variable que hacen la primera derivada positiva. Para los valores que hacen la primera derivada negativa, la función es decreciente. Por lo tanto, vamos a estudiar el signo de la primera derivada:

$$y' = \frac{3x^2(1+x)^2 - x^3 \cdot 2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{3x^2 + 6x^3 + 3x^4 - 2x^3 - 2x^4}{(1+x)^4} =$$

$$= \frac{x^4 + 4x^3 + 3x^2}{(1+x)^4} = \frac{x^2(x^2 + 4x + 3)}{(1+x)^4}$$

Los posibles máximos y mínimos anulan la derivada. En nuestro caso:

$$x^2(x^2 + 4x + 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$

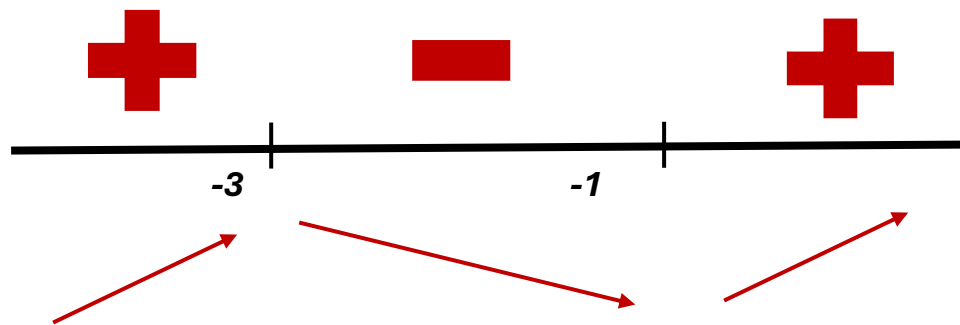
Pero, como queremos estudiar el signo de esta función deberíamos aplicar el método del que ya se ha hablado en los apuntes de teoría, igualar a cero también el denominador. Pero en este caso, creemos que

es fácil ver, es siempre positivo para cualquier valor de la variable, puesto que está elevado a la cuarta. También, el término x^2 del numerador es siempre positivo y, por todo ello, el signo de la derivada dependerá exclusivamente del signo del polinomio de segundo grado del denominador.

:

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} -3 \\ -1 \end{cases}$$

Y, como sabemos, el signo de ese polinomio sólo puede cambiar en esos valores de x :



$$x < -3 \quad |x = -10 \rightarrow y'(-10) > 0| \rightarrow y' > 0$$

$$-3 < x < -1 \quad |x = -2 \rightarrow y'(-2) < 0| \rightarrow y' < 0$$

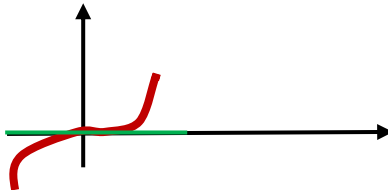
$$x > -1 \quad |x = 0 \rightarrow y'(0) > 0| \rightarrow y' > 0$$

Donde el signo se ha calculado para un valor cualquiera x de cada intervalo (sabemos que sólo puede cambiar en los valores que lo anulan, los valores calculados).

Dado que para el valor de $x = -3$ existe la función, recordando el dominio, hemos de deducir entonces **que representa a un máximo relativo de la función. Este punto tendrá de ordenada el valor que nos dé la función para ese valor de x . No sustituiremos en la derivada, sino en la función.** El punto cuya abscisa es $x = -1$ **no representa un mínimo**, puesto que no existe la función para ese valor, recordar que es una asíntota vertical.

El valor de $x = 0$ **anula la derivada, pero, por estar al cuadrado, el signo de la derivada no cambia en él. Por lo tanto, NO**

ES UN EXTREMO RELATIVO, es lo que se llama un **punto de silla**, de **tangente horizontal**. La función para $x = 0$ es $y = 0$. La “pinta” de la función en ese punto sería:



Con la tangente horizontal puesto que la derivada es cero.

Veremos entonces, en el apartado siguiente, que es un punto de inflexión, como vemos en la figura anterior.

Por último, calculamos los puntos de inflexión. Hemos de recordar que anulan la segunda derivada:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x^4 + 4x^3 + 3x^2}{(1+x)^4} \rightarrow y'' \\ &= \frac{(4x^3 + 12x^2 + 6x)(1+x)^4 - (x^4 + 4x^3 + 3x^2)4(1+x)^3}{(1+x)^8} \end{aligned}$$

En esta expresión, **debemos de sacar factor común en el numerador** porque si no el polinomio que nos queda es muy engorroso.

$$\begin{aligned} &\frac{(4x^3 + 12x^2 + 6x)(1+x)^4 - (x^4 + 4x^3 + 3x^2)4(1+x)^3}{(1+x)^8} = \\ &\frac{(1+x)^3[(4x^3 + 12x^2 + 6x)(1+x) - 4(x^4 + 4x^3 + 3x^2)]}{(1+x)^8} = \\ &\frac{4x^3 + 12x^2 + 6x + 4x^4 + 12x^3 + 6x^2 - 4x^4 - 16x^3 - 12x^2}{(1+x)^5} = \\ &\frac{6x^2 + 6x}{(1+x)^5} = \frac{6x(x+1)}{(1+x)^5} = \frac{6x}{(1+x)^4} \end{aligned}$$

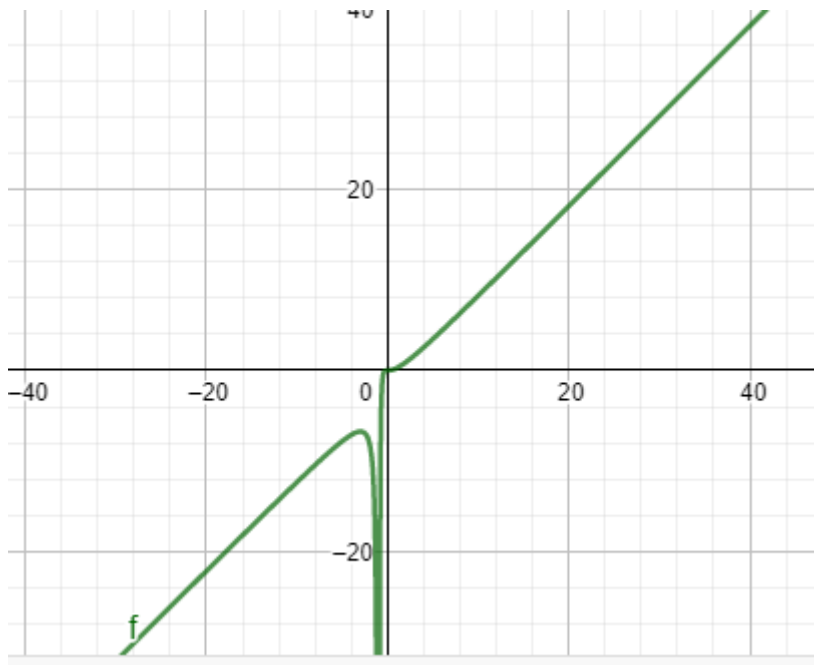
Y, dado que no nos preguntan los intervalos de concavidad y convexidad tendremos que estudiar el signo de la segunda derivada, al igual que hemos hecho con la primera. Para ello, sólo tenemos que

calcular los valores de la variable x que anulan el numerador, **puesto que el denominador es siempre positivo.**

$$6x = 0 \rightarrow x = 0$$

Aunque podríamos seguir el método indicado en varios ejemplos, en este caso es fácil ver que el numerador será negativo para valores de x **negativos, convexa**, y positivo para valores de x **positivos, cóncava**, en forma de cuenco como explica la etimología de la palabra.

Aunque no nos lo pregunten, y ya que disponemos de programas para dibujar la función, dicha función tendría esta gráfica:



Observar que en $x = 0$ tenemos un punto de inflexión, aunque se anule la primera derivada. La curva en el primer cuadrante, como sabemos, tiene forma de cuenco, cóncava, aunque al dibujar en esa escala parece casi una recta.

Ejercicio 3 (Funciones)

Hallar el valor de a y b para que curva

$$y = x^3 + ax^2 + bx + 1$$

Tenga en el punto $(x_0, -1)$ un punto de inflexión y la pendiente de la tangente valga 1.

Tenemos información sobre la pendiente de la tangente en ese punto, la derivada, que vale **1**. También sabemos que es un punto de inflexión y, por lo tanto, anula la segunda derivada. Por ello, calculamos la primera y la segunda derivada y aplicamos esas condiciones:

$$y' = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow |y'(x_0) = 1| \rightarrow \mathbf{1 = 3x_0^2 + 2ax_0 + b \quad (1)}$$

Ecuación que, como no podría ser de otra manera, utilizaremos como tal para resolver el problema. Vamos ahora con el punto de inflexión:

$$y'' = 6x + 2a \rightarrow |y''(x_0) = 0| \rightarrow \mathbf{0 = 6x_0 + 2a \quad (2)}$$

Como vemos, tenemos dos ecuaciones, pero con tres incógnitas, **a , b y x_0** . Nos falta una tercera ecuación. Creemos que no es difícil ver que proviene del hecho de un dato que todavía no hemos tenido en cuenta: **el punto $(x_0, -1)$ pertenece a la función**. Por lo tanto, **ha de cumplir la ecuación que la define**:

$$y = x^3 + ax^2 + bx + 1 \rightarrow |y(x_0) = -1| \rightarrow$$

$$\mathbf{-1 = x_0^3 + ax_0^2 + bx_0 + 1 \quad (3)}$$

El sistema para resolver es entonces:

$$\begin{cases} \mathbf{1 = 3x_0^2 + 2ax_0 + b \quad (1)} \\ \mathbf{0 = 6x_0 + 2a \quad (2)} \\ \mathbf{-1 = x_0^3 + ax_0^2 + bx_0 + 1 \quad (3)} \end{cases}$$

Dado que no es un sistema lineal, no nos queda más remedio que utilizar el sistema de sustitución:

Despejamos **b** y **a** de las dos primeras ecuaciones y sustituimos en la tercera:

$$(2) a = -3x_0; (1) b = 1 - 3x_0^2 - 2ax_0 = 1 - 3x_0^2 - 2(-3x_0)x_0 \rightarrow \\ b = 1 + 3x_0^2$$

Y, sustituyendo en **(3)**

$$-1 = x_0^3 + (-3x_0)x_0^2 + (1 + 3x_0^2)x_0 + 1 \rightarrow \\ -2 = x_0^3 + x_0 \rightarrow x_0^3 + x_0 + 2 = 0$$

Descomponiendo por Ruffini:

$$x_0^3 + x_0 + 2 = (x_0 + 1)(x_0^2 - x_0 - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0^2 - x_0 - 2 = 0 \nexists x \end{cases}$$

La solución es entonces:

$$\begin{cases} x_0 = -1 \\ a = -3(-1) = 3 \\ b = 1 + 3(-1)^2 = 4 \end{cases}$$

Ejercicio 4 (Funciones)

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x} & x < 0 \\ x^2 - 4x + 3 & x \geq 0 \end{cases}$$

- a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.**
- b) (0.25 puntos) ¿Es $f(x)$ derivable en $x = 0$? Justifique la respuesta.**
- c) (0.75 puntos) Calcule, si existen las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.**
- d) (0.75 puntos) Determine para que $x \in (0, \infty)$ el punto de la gráfica en el que la pendiente de la recta tangente es nula y obtenga la ecuación de dicha tangente. En el punto obtenido, ¿alcanza la función algún extremo relativo? En caso afirmativo, clasifíquelo.**

a)

El único valor de x en el que la función puede ser no continua es el valor $x = 0$, que anula el denominador y además separa los intervalos de definición de la función. Para estudiar su continuidad, aplicamos la definición:

$$\begin{aligned} \exists f(0)? &\rightarrow f(0) = 0^2 - 0 + 3 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x+1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= x^2 - 4x + 3 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} &\neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \end{aligned}$$

No existe el límite, **la función es discontinua en $x = 0$** . La discontinuidad es de salto infinito, pues lo es uno de los límites.

b)

Al no ser función continua en $x = 0$, tampoco es derivable.

c)

Ya hemos visto que $x = 0$ es una **asíntota vertical**, pues uno de sus límites laterales es infinito.

Para calcular las asíntotas horizontales resolvemos los límites cuando la variable tiende a $\pm\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - 4x + 3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x} = 2 \rightarrow y = 2 \text{ A.H.}$$

Como vemos, hay una asíntota horizontal, $y = 2$, por la izquierda.

d)

Si la pendiente de la tangente es nula, la derivada es nula y es que estamos ante un punto crítico. Puede haber varios, estudiamos cada trozo por separado:

$$x < 0 \rightarrow y' = \frac{2 \cdot x - (2x + 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2} = 0 \rightarrow \nexists x$$

$$x \geq 0 \rightarrow y' = 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \in x \geq 0$$

Como vemos, en $x = 2$, se anula la pendiente de la derivada y, por lo tanto, la tangente es una recta horizontal. Como

$$x = 2 \rightarrow f(2) = -1 \rightarrow P(2, -1)$$

Y la ecuación de la tangente es:

$$y = -1$$

Si nos acordamos de que, por tener el coeficiente de x^2 positivo, se trata de una parábola cóncava, en forma de cuenco (en la posición en que se ponen los cuencos para llenarlos, claro), y, por lo tanto, el punto **(2, -1)** es un mínimo. Si no, también podemos ver cuanto vale la segunda derivada. Si es positiva se trata de un mínimo y si es negativa es un máximo.

$$y'' = 2 > 0 \forall x \rightarrow \text{mínimo}$$

Ejercicio 5 (Funciones)

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x \ln x & x > 0 \end{cases}$$

- a) (0.5 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función en $x=0$**
b) (1punto) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, así como los máximos y mínimos relativos.
c) (1punto) Calcule

$$\int_1^2 f(x) dx$$

a)

Estudiamos las tres condiciones que definen la continuidad en un punto:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = (0 \cdot (-\infty)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{-\infty}{\infty} \right) = |L'H| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \frac{-x^2}{x} = 0 \\ f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \end{cases}$$

Dado que se cumplen las tres condiciones, la función es continua en $x = 0$

Para ver si es derivable, aplicamos la definición de derivada:

$$\begin{aligned} y'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - 0}{x - 0} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto, no es derivable en $x = 0$

b)

Para estudiar los máximos y mínimos relativos estudiamos la derivada en cada uno de los intervalos donde la función está definida de distinta manera:

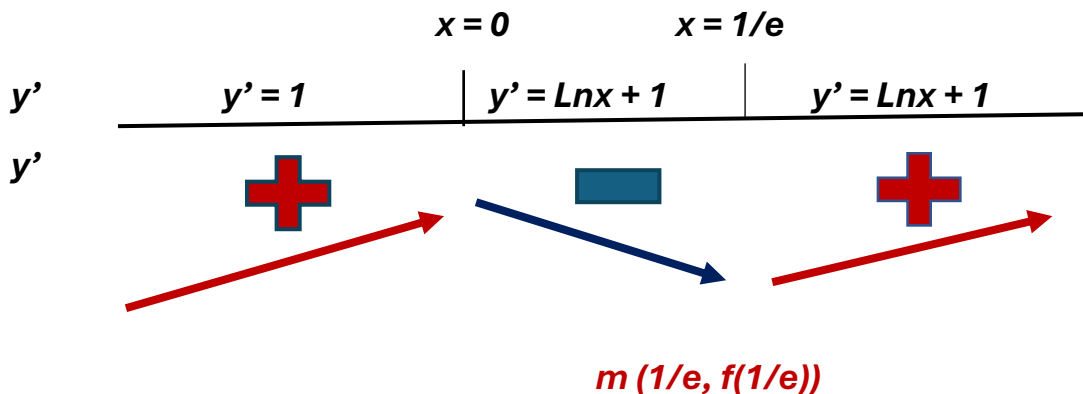
$$x \leq 0 \rightarrow f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1 > 0 \forall x \rightarrow \nexists \text{Extremos relativos}$$

$$x > 0 \rightarrow f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1 = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1}$$

Como vemos, hay un posible extremo relativo en $x = 1/e$. Como debemos de saber, será máximo si la segunda derivada es negativa para dicho valor y mínimo si la segunda derivada es positiva. Calculamos entonces la segunda derivada para dicho valor de la variable:

$$y' = \frac{1}{x} \rightarrow y' \left(\frac{1}{e} \right) = e > 0 \rightarrow \text{mínimo}$$

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son



c)

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) dx &= \int_1^2 x \ln x dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = u \rightarrow \frac{1}{x} dx = du \\ x dx = dv \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{2^2}{2} \ln 2 - \frac{1^2}{2} \ln 1 \right) - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^2 = 2 \ln 2 - \left(1 - \frac{1}{4} \right) = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$$

Ejercicio 6 (Funciones)

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 e^{\frac{-1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función en $x = 0$**
- b) (0.5 puntos) Estudie si la función presenta algún tipo de simetría**
- c) (1 punto) Calcule la siguiente integral**

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6} dx$$

a)

Estudiamos las tres condiciones que debe de cumplir la función para que sea continua en $x = 0$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(0) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 e^{\frac{-1}{x^2}} = (0 \cdot e^{-\infty}) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 e^{\frac{-1}{x^2}} = (0 \cdot e^{-\infty}) = 0 \end{cases} \\ f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow 0 = 0 \end{cases}$$

Como vemos, se cumplen las tres condiciones, existe la función, existe el límite y ambos valores son iguales. Estudiamos la derivabilidad:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 e^{\frac{-1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{-1}{x^2}} = (0 \cdot e^{-\infty}) = 0$$

b)

Dado que a la izquierda y a la derecha de $x = 0$ la función es la misma, la función dada será simétrica si los es la función

$$y = x^3 e^{\frac{-1}{x^2}}$$

Para ello, comprobamos la relación entre $f(x)$ y $f(-x)$:

$$\begin{cases} f(x) = x^3 e^{\frac{-1}{x^2}} \\ f(-x) = (-x)^3 e^{\frac{-1}{(-x)^2}} = -x^3 e^{\frac{-1}{x^2}} = -f(x) \end{cases}$$

Como $f(x) = -f(-x)$ la función es impar o simétrica respecto del origen.

c)

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6} dx = \int_1^2 \frac{x^3 e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^6} = \int_1^2 \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^3}$$

Nos tendríamos que dar cuenta que **aparece una función, el exponente de la exponencial, y su derivada multiplicando al**

diferencial dx , por lo que esta integral, como se ha dicho en los apuntes de teoría, es por cambio de variable:

$$y = -\frac{1}{x^2} \rightarrow y' = -\frac{-1 \cdot 2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^3} dx &= \int_1^2 e^{\frac{-1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^3} dx = \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{x^2} = t \rightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow t = -1 \\ x = 2 \rightarrow t = -\frac{1}{4} \end{cases} \\ \frac{2}{x^3} dx = dt \rightarrow \frac{1}{x^3} = \frac{dt}{2} \end{array} \right| = \\ &= \int_{-1}^{-\frac{1}{4}} e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} e^t \Big|_{-1}^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{1}{4}} - e^{-1} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 7 (Funciones)

Sea la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

- a) (0.5 puntos) Compruebe si la función verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo $[-1 \ 1]$**
- b) (1 punto) Calcule y clasifique los extremos relativos de la función $f(x)$ en R .**
- c) (1 punto) un punto determine el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje OX en el intervalo $[-1 \ 1]$**

a)

La función cumplirá las hipótesis del teorema de Bolzano en ese intervalo si es continua y cambia de signo en los extremos.

Una función cociente de polinomios es continua para todo valor de x salvo los que anulan el denominador.

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \sqrt{-1} \notin R$$

Por lo tanto, al no haber ningún valor de la variable que anule el denominador, la función es continua en todo **R** .

Los signos de **$f(x)$** en los extremos son:

$$f(-1) = \frac{-1}{2} < 0; \quad f(1) = \frac{1}{2}$$

Como cambia de signo, también se cumple la segunda hipótesis. La función cumple las hipótesis del teorema de Bolzano.

b)

Debemos de saber que los extremos relativos anulan la primera derivada, por lo tanto:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1 + x^2) - x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(1 + x^2)^2} = 0 \rightarrow -x^2 + 1 = 0 \rightarrow$$

$$x = \pm 1$$

Para deducir cuál es máximo o cuál es mínimo, debemos de saber que los máximos hacen la segunda derivada negativa y los mínimos la hacen positiva.

$$f''(x) = \frac{-2x(1 + x^2)^2 - (-x^2 + 1) \cdot 2(1 + x^2) \cdot 2x}{(1 + x^2)^4} =$$

$$= \frac{(1 + x^2)[-2x(1 + x^2) - 4x(-x^2 + 1)]}{(1 + x^2)^4} = \frac{2x^3 - 6x}{(1 + x^2)^3} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3}$$

$$f''(-1) = \frac{4}{8} > 0 \rightarrow m$$

$$f''(1) = \frac{-4}{8} < 0 \rightarrow M$$

c)

Como debemos de saber, el área entre una función y el eje **OX** en un intervalo es la integral definida de la función en ese intervalo. Pero ¡ojo! Debemos de hacer un esbozo de la función pues, si parte de la función es negativa y parte positiva en ese intervalo, la integral dará

como negativa el área que esté por debajo y positiva la que esté por arriba y el resultado será la suma de ambos números. La suma entonces de esas dos áreas no coincidirá con lo que definimos como área total, pues cuando se habla de área se entiende su valor absoluto.

Con lo que hemos deducido en los apartados anteriores, y con los cortes con los ejes, pensamos que no es complicado realizar ese esbozo. Además, creemos que es fácil de ver que esa función es impar:

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x}{x^2 + 1} = -f(x)$$

Cortes con los ejes:

$$OX: \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{x}{x^2 + 1} \end{cases} \rightarrow 0 = \frac{x}{x^2 + 1} \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0)$$

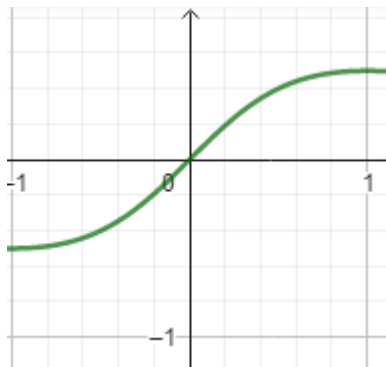
$$OY: \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x}{x^2 + 1} \end{cases} \rightarrow y = 0 \rightarrow (0,0)$$

Máximos y mínimos:

$$M: x = 1 \rightarrow y = \frac{1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2} \rightarrow \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

$$m: \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$$

Creemos que con esta información es suficiente para dibujar la gráfica en el intervalo de integración $[-1 \ 1]$



Como vemos en la figura, y al tratarse de una función impar, para calcular el área entre $x = -1$ y $x = 1$ bastará con calcular la integral entre $x = 0$ y $x = 1$ y multiplicar el resultado por dos:

$$A = 2 \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \left| \int \frac{f' dx}{f} = \ln f \right| =$$

$$= \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \ u^2$$