

Cuestión 1

Enuncie el teorema de las fuerzas vivas o teorema de la energía cinética. Explique qué son las fuerzas conservativas y qué relación tienen con la energía potencial.

Problema 1

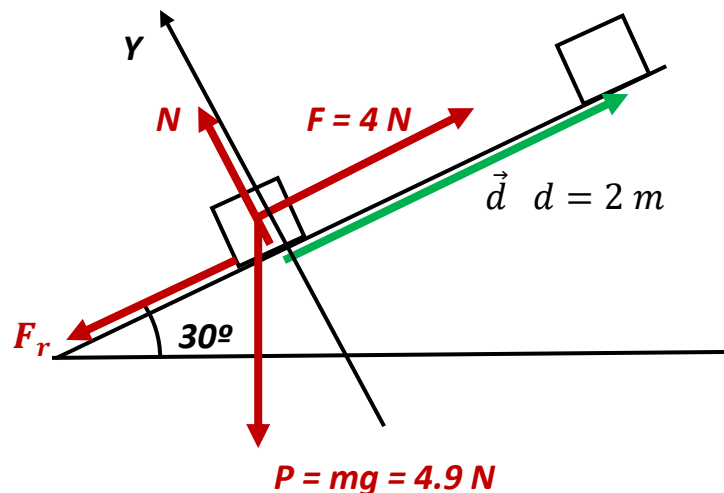
Un cuerpo de 0.5 kg, inicialmente en reposo, asciende por un plano inclinado 30° con respecto a la horizontal por el efecto de una fuerza de 4 N paralela a dicho plano. El coeficiente de rozamiento del cuerpo con la superficie es 0.2.

- a) Calcule el trabajo realizado por cada una de las fuerzas que intervienen cuando el cuerpo ha recorrido una distancia de 2 m.*
- b) Determine, mediante consideraciones energéticas, la velocidad del cuerpo después de recorrer dicha distancia.*

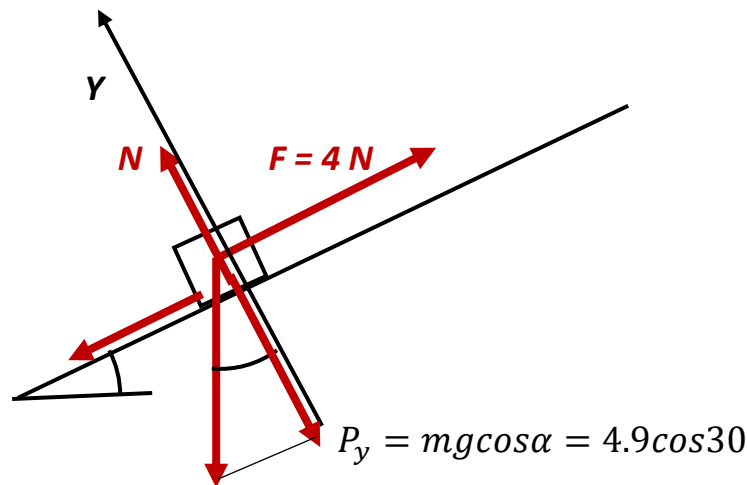
Datos. $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

a)

Para variar, un dibujo nos facilitará mucho la visión del problema y su resolución. En él, vamos a dibujar todas las fuerzas, en rojo, y el desplazamiento efectuado por el cuerpo, en verde.



Para calcular el trabajo de las fuerzas nos hace falta primero, claramente, conocer su valor, además de su dirección y sentido. En este caso, nos hace falta calcular el valor de la normal y el de la fuerza de rozamiento. Para ello, como debemos de recordar, hemos de aplicar que la resultante en el eje que hemos llamado **Y** sea nula puesto que no hay movimiento en esa dirección. Descomponemos, por lo tanto, la fuerza del peso sobre él, ya que la fuerza de **4 N** y el rozamiento no tienen componente en esa dirección pues son perpendiculares a **Y**.

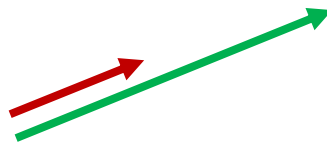


$$\sum F_y = 0 \rightarrow N = 4.9 \cos 30 = 4.9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2.45\sqrt{3} \text{ N}$$

$$F_r = \mu N = 0.2 \cdot 2.45\sqrt{3} = 0.49\sqrt{3} \text{ N}$$

Conocidos los valores de todas las fuerzas, estamos en condiciones de calcular su trabajo y el trabajo total:

Trabajo de la fuerza $F = 4 \text{ N}$



$$W_F = F \cdot d \cdot \cos \widehat{\vec{F}\vec{d}} = 4 \cdot 2 \cdot \cos 0 = 8 \text{ J}$$

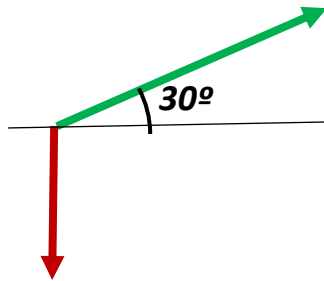
Trabajo de la normal



$$W_N = N \cdot d \cdot \cos \widehat{\vec{N}\vec{d}} = 2.45\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 90 = 0 \text{ J}$$

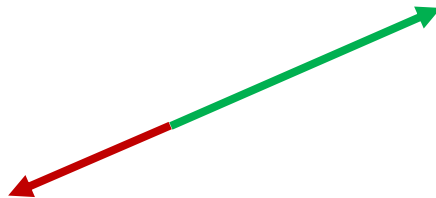
El trabajo de la normal en nuestros problemas siempre será nulo pues el ángulo que forma con el desplazamiento es 90.

Trabajo del peso



$$W_P = P \cdot d \cdot \cos \widehat{\vec{P}\vec{d}} = 4.9 \cdot 2 \cdot \cos(90 + 30) = 4.9 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -4.9 \text{ J}$$

Trabajo del rozamiento



$$W_{Fr} = F_r \cdot d \cdot \cos \widehat{\vec{F}_r\vec{d}} = 0.49 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 180 = -0.98\sqrt{3} \text{ J}$$

El trabajo total será la suma de todos los trabajos hallados:

$$W = W_F + W_N + W_P + W_{Fr} = 8 - 4.9 - 0.98\sqrt{3} \approx 1.40 \text{ J}$$

b)

Aplicando el teorema de las fuerzas vivas podemos calcular la velocidad al final del trayecto:

$$W_{TOTAL} = \Delta E_C \rightarrow 1.40 = \frac{1}{2} 0.5 \cdot v_f^2 - 0 \rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2.80}{0.5}} = 2.37 \text{ m/s}$$

Cuestión 2

Un planeta gira en torno a una estrella de masa igual a la mitad de la masa del Sol describiendo una órbita de radio igual a la mitad del radio orbital del planeta tierra alrededor del Sol. Discuta razonadamente cuál de los dos planetas tarda más tiempo en dar una vuelta completa en su correspondiente órbita.

Deberíamos pensar fácilmente en la ley de Kepler que se refiere a la relación entre los radios y los periodos. Nos la podemos aprender de memoria pero, aparte de que en nuestro caso no seamos muy amigos de ello, es muy fácil de deducir a partir de la ley fundamental que nos dice que la fuerza gravitatoria es la fuerza centrípeta y, por lo tanto, igual a la masa por la aceleración centrípeta. Este concepto sí que no lo podemos olvidar:

$$G \frac{M \cdot m}{R_o^2} = m\omega^2 R_o \rightarrow \left| \omega = \frac{2\pi}{T} \right| \rightarrow GM = \frac{4\pi^2}{T^2} R_o^3 \rightarrow$$

$$\frac{GM}{4\pi^2} = \frac{R_o^3}{T^2}$$

Donde **M** es la masa central respecto al cual orbita el satélite. Si aplicamos la ley al planeta del problema y a la tierra:

$$P: \frac{G \frac{M_{sol}}{2}}{4\pi^2} = \frac{\left(\frac{R_T}{2}\right)^3}{T_P^2}$$

$$T: \frac{GM_{sol}}{4\pi^2} = \frac{R_T^3}{T_T^2}$$

Donde se han tenido en cuenta los datos del problema sobre la masa de la estrella respecto a la cual orbita el planeta, la mitad que la del sol, y sobre su radio orbital, también la mitad que el de la tierra.

Dividiendo ambas expresiones se simplifican todos los términos excepto los periodos:

$$\frac{1}{2} = \frac{T_T^2}{8T_P^2} \rightarrow T_P^2 = \frac{1}{4} T_T^2 \rightarrow T_P = \frac{1}{2} T_T$$

Problema 2

Un satélite tarda cuatro horas en dar una vuelta completa alrededor de un planeta con una velocidad orbital de 5000 m/s. Calcule razonadamente (como si pudiera ser de otra manera)

- a) El radio de la órbita y la masa del planeta.*
- b) La velocidad de escape desde la órbita.*

Datos: Constante universal $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ Kg}^{-2}$

a)

Aplicando la ley fundamental del movimiento orbital:

$$G \frac{Mm}{R_o^2} = m \frac{v^2}{R_o} \rightarrow G \frac{M}{R_o} = v^2 \rightarrow G \frac{M}{R_o} = (5 \cdot 10^3)^2 = 25 \cdot 10^6 \quad (1)$$

Como vemos, en esta ecuación aparecen dos incógnitas, la masa del planeta central y el radio de la órbita. Pero sabemos la velocidad y el tiempo que le cuesta dar una vuelta. Pensamos entonces que no es difícil pensar que podemos calcular el radio orbital pues:

$$e = v \cdot t \rightarrow 2\pi R_o = v \cdot T \rightarrow 2\pi R_o = 5 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 3600 \rightarrow$$

$$\rightarrow R_o = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 3600}{2\pi} = \frac{3.6 \cdot 10^7}{\pi}$$

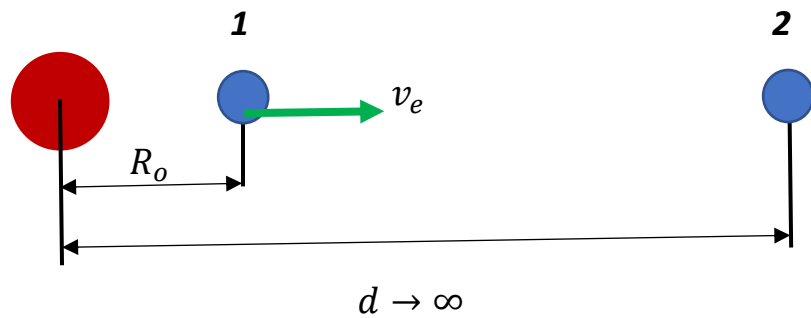
Conocido el radio orbital y sustituyendo en la ecuación (1)

$$G \frac{M}{R_o} = 25 \cdot 10^6 \rightarrow G \frac{M}{\frac{3.6 \cdot 10^7}{\pi}} = 25 \cdot 10^6 \rightarrow M = \frac{3.6 \cdot 25 \cdot 10^{13}}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \pi} \rightarrow$$

$$M \approx 4.29 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$$

b)

Nos preguntan la velocidad que hay que darle a una masa situada a esa distancia para que llegue “muy lejos” del astro central, al infinito, con velocidad nula. Aplicando el teorema del trabajo entre ambos puntos, **1** y **2**:



$$W_{NC} = E_{m2} - E_{m1} \rightarrow \begin{cases} W_{NC} = 0 \\ E_{m2} = -G \frac{Mm}{\infty} + \frac{1}{2} m 0^2 = 0 \rightarrow \\ E_{m2} = -G \frac{Mm}{R_o} + \frac{1}{2} m v_e^2 \end{cases}$$

$$0 = 0 - \left(-G \frac{Mm}{R_o} + \frac{1}{2} m v_e^2 \right) \rightarrow \frac{1}{2} m v_e^2 = G \frac{Mm}{R_o} \rightarrow v_e = \sqrt{2G \frac{M}{R_o}} \rightarrow$$

$$v_e = \sqrt{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{4.29 \cdot 10^{24}}{\frac{3.6 \cdot 10^7}{\pi}}} \approx 4.997 \text{ m/s}$$