

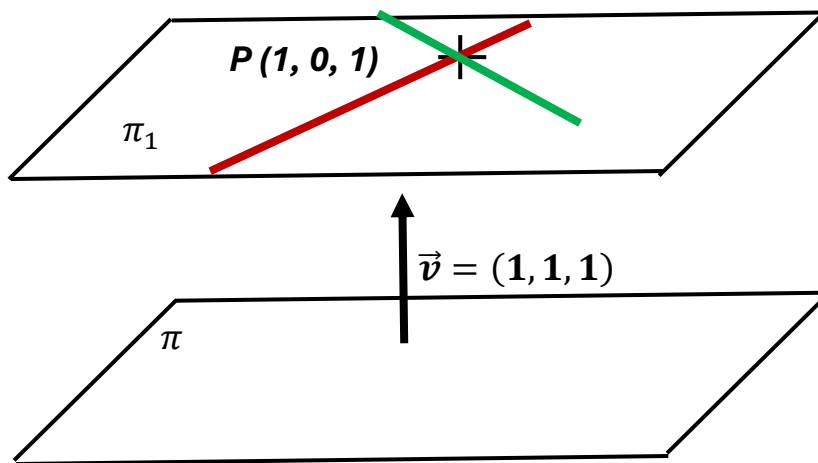
Ejercicio 1 (3d)

Halla la ecuación de una recta paralela al plano

$$\pi \equiv x + y + z = 0$$

Y que contenga al punto $P(1, 0, 1)$. ¿Es única dicha recta?

Un dibujo que refleje la situación, con la solución gráfica, aunque después no sepamos llegar a ella matemáticamente, es muy clarificador. Dibujamos el plano, no hace falta dibujar los tres ejes, y un punto exterior a él, el punto P . Sabemos que es exterior a él porque no cumple la ecuación del plano:



Deberíamos ver que las rectas dibujadas en rojo y verde, por estar en un plano paralelo al dado, son también paralelas a él. Entonces, cualquier recta que pase por el punto **P y esté contenida en el plano π_1** , será solución. Por lo tanto, cualquier vector **perpendicular al vector director del plano π , $\vec{v} = (1, 1, 1)$** será el vector de una recta paralela al plano π .

Un vector perpendicular al dado será:

$$\vec{t} = (a, b, c) \setminus \vec{v} \cdot \vec{t} = 0 \rightarrow a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 = 0$$

Una solución cualquiera, dado que es un sistema compatible indeterminado será:

$$a = 0, b = 1 \rightarrow 0 + 1 + c = 0 \rightarrow c = -1 \rightarrow \vec{t} = (0, 1, -1)$$

Y la ecuación de la recta:

$$r \equiv \begin{cases} P(1,0,1) \\ \vec{t} = (0,1,-1) \end{cases} \rightarrow \frac{x-1}{0} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

Ejercicio 2 (3d)

Determina los valores de los parámetros a y b para que el plano π contenga a la recta r :

$$\pi \equiv ax + y + z = b \quad r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Deberíamos entender que, si todos los puntos de intersección de ambos conjuntos son los puntos de la recta, el sistema de ecuaciones formado por ellos ha de ser un sistema compatible indeterminado, con un parámetro (una recta en paramétricas depende de un parámetro). Representamos entonces el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & b \end{pmatrix}$$

Para que sea compatible indeterminado, el determinante de las incógnitas ha de valor cero (en caso contrario, el sistema sería compatible determinado). Por lo tanto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 1 + a - (-2a + 1 - 1) = 3a - 3 = 0 \rightarrow a = 1$$

Con el valor de a calculado, vemos como queda el sistema y lo resolvemos por Gauss para imponer la condición de que sea **SCI**, de ahí calcularemos el valor de b .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} = \begin{array}{l} 2^a F \rightarrow 2^a F + 1^a F \\ 3^a F \rightarrow 3^a F - 1^a F \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

Para que el sistema tenga solución, **SCI** evidentemente, la última fila ha de ser nula. Por lo tanto:

$$b - 1 = 0 \rightarrow b = 1$$

La solución es, entonces:

$$a = 1$$

$$b = 1$$

Ejercicio 3 (3d)

Determina, según los valores del parámetro “a”, la posición relativa de la recta:

$$r \equiv \begin{cases} ax + 3y - 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$$

Y el plano

$$6x + 5y - 3z = 2$$

Creemos que es fácil ver que, entre otras maneras, podemos responder resolviendo el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que forman

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & -3 & 2 \\ a & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Y, como debemos de recordar, la solución al sistema dependerá del valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -3 \\ a & 3 & -2 \end{vmatrix} = -20 + 18 + 3a - (5a - 18 + 12) = -2a + 4$$

$$\begin{cases} \text{Si } -2a + 4 \neq 0 \rightarrow a \neq 2 \text{ } \text{ran}M = \text{ran}M^* = 3 = n^{\circ} \text{ inc.} \rightarrow S.C.D \text{ (1)} \\ \text{Si } -2a + 4 = 0 \rightarrow a = 2 \text{ } \text{ran}M < 3 \text{ (2)} \end{cases}$$

El caso **(1)** corresponde, como se dice, a un sistema compatible determinado, dado que los rangos de la matriz de los coeficientes y de la ampliada son iguales y coincide con el número de incógnitas, por lo que la recta y el plano se cortan en un punto.

En el caso **(2)** el rango de la matriz de los coeficientes es menor que tres, pero no podemos todavía saber cuál es y tampoco el

de la matriz ampliada. Como el valor de **a** es conocido, lo resolvemos por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2^a F \rightarrow 2^a F + 1^a F \times (-3) \\ 3^a F \rightarrow 3^a F - 1^a F}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -6 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= |3^a F \rightarrow 3^a F \times (-2) + 2^a F| = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de los coeficientes es, como vemos, dos. Sin embargo, el rango de la matriz ampliada es tres, por lo que es un sistema incompatible. Ya que no hay intersección entre el plano y la recta, podemos decir que la recta y el plano son paralelos.

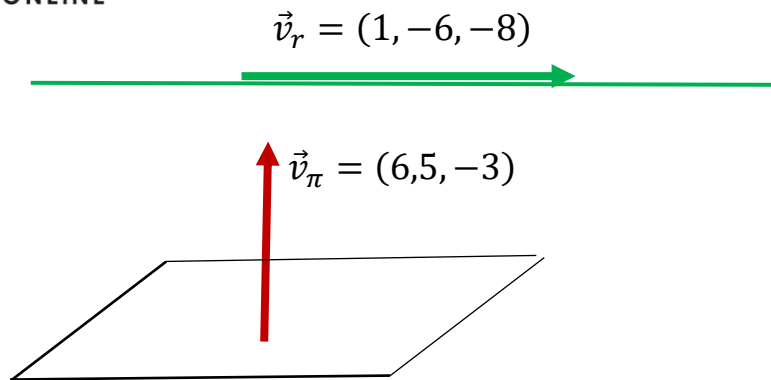
Podemos deducir esta característica geométrica, también, calculando los vectores de ambos conjuntos. Para ese valor de “**a**” la ecuación de la recta, dada como intersección de dos planos es:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$$

Dado que la recta es perpendicular a ambos planos, podemos calcular su vector como producto vectorial de los vectores directores de ambos:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\vec{i} - 6\vec{j} - 8\vec{k}$$

Como la recta es paralela al plano, su vector, el vector calculado anteriormente, ha de ser perpendicular al vector director del plano, como se ve en la figura



Efectivamente, observamos que su producto escalar es cero, por lo que ambos vectores son perpendiculares.

Ejercicio 4 (3d)

Estudia según el valor del parámetro “a” la posición relativa de las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} ax + 3y - 2z = 12 \\ 2x + 5y - z = 6 \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 5 + 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 6 + 4\lambda \end{cases}$$

Como debemos de saber, los vectores de ambas rectas son imprescindibles para el estudio de su posición relativa. Que haya un parámetro, **a**, no nos debe de preocupar, trabajamos con él como lo que es, un número como otro cualquiera.

El vector de la recta **s**, al estar en paramétricas es inmediato, los coeficientes del parámetro:

$$\vec{v}_s = (3, -1, 4)$$

El vector de la recta **r**, como en el problema anterior, será el producto de los vectores directores de los planos que la definen:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - \vec{j}(-a + 4) + (5a - 6)\vec{k} = (7, a - 4, 5a - 6)$$

Para saber si se cruzan hemos de utilizar estos dos vectores y un vector cualquiera que vaya de un punto de una de ellas a otro punto de la otra.

$$r \equiv \begin{cases} ax + 3y - 2z = 12 \\ 2x + 5y - z = 6 \end{cases} \rightarrow |x = 0| \rightarrow \begin{cases} 3y - 2z = 12 \\ 5y - z = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -6 \end{cases}$$

Donde se ha dado a la x el valor de cero para que no aparezca el valor del parámetro y simplificar. Un punto de la recta r es, por lo tanto, el punto

$$P_r = (0, 0, -6)$$

Un punto de la recta s , como debemos de saber, es el formado por los números que no están multiplicados por el valor del parámetro en la ecuación paramétrica. Por lo tanto:

$$\begin{cases} P_r = (0, 0, -6) \\ P_s = (5, 1, 6) \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{P_r P_s} = (5, 1, 12)$$

Si los tres vectores, los dos directores de las dos rectas y este último, forman un sistema de vectores libres, si el rango de la matriz formada por ellos es tres, las dos rectas se cruzarán. Entonces calculamos el determinante formado por los tres. Si su valor es distinto de cero, las rectas se cruzarán.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 7 & a-4 & a-6 \\ 5 & 1 & 12 \end{vmatrix} \\ = 36(a-4) + 28 - 5(a-6) \\ - [20(a-4) + 3(a-6) - 84] = \\ = 8a + 240 = 0 \rightarrow a = 30$$

Podemos decir entonces que si:

$$a \neq 30$$

Las rectas se cruzan.

Si $a = 30$ las rectas se cortan, **salvo que sean paralelas**. Vemos entonces si son o no son paralelas:

$$a = 30 \rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (7, 26, 144) \\ \vec{v}_s = (3, -1, 4) \end{cases} \rightarrow \frac{7}{3} \neq \frac{26}{-1} \neq \frac{144}{4}$$

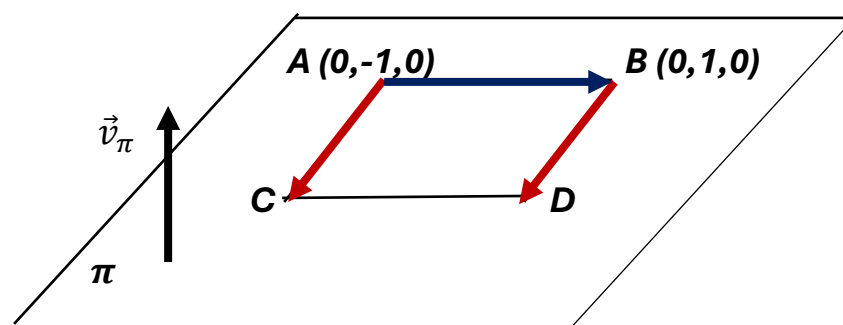
Y dado que los vectores no tienen las componentes proporcionales, las rectas no son paralelas y, por lo tanto, **se cortan**.

Ejercicio 5 (3d)

Sea el plano $\pi \equiv z = x$ y los puntos $A(0, -1, 0)$ y $B(0, 1, 0)$ pertenecientes al plano.

- a) (1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices contiguos de un cuadrado cuyos otros dos vértices, C y D , están también en el plano, encuentre las coordenadas de C y D .**
- b) (1.25 puntos) Ídem si los vértices A y B son vértices opuestos del cuadrado**

Una figura creemos que es fundamental. La vamos a dibujar “genéricamente”, sin tener en cuenta las posiciones “reales” del enunciado para poder resolver el problema cualquiera que sea la situación. En un segundo apartado veremos, por la simplicidad de los datos, que este problema se puede hacer “visualmente”.



Si conocemos los vectores $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ y, dado que conocemos los puntos A y B , podremos conocer los puntos C y D . En la figura, creemos que se ve bien, que el vector $\overrightarrow{AC}$ es perpendicular a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\vec{v}_\pi$. Por lo tanto, **su dirección será la de su producto vectorial**. Su módulo será el mismo que el del vector $\overrightarrow{AB}$,

pues se trata de un cuadrado. Calculamos primero su dirección, después tendremos en cuenta su módulo.

$$\overrightarrow{AB} = (0,2,0) \vec{v}_{\pi}(-1,0,1) \rightarrow \overrightarrow{AC} \parallel \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2,0,2) \rightarrow$$

Este vector indica la dirección de los vectores que buscamos. Por comodidad, podemos trabajar con un vector paralelo y del mismo sentido, dividiendo sus componentes entre 2. Esto, claramente, no se puede hacer con un punto.

$$(2,0,2) \parallel (1,0,1) = \vec{r}$$

Para calcular el vector $\overrightarrow{AC}$, el mismo que $\overrightarrow{BD}$, nos hace falta por último tener en cuenta que su módulo ha de ser, como se ha dicho, el mismo que el del vector $\overrightarrow{AB}$. Por ello, los podemos calcular como el producto de su módulo por un vector unitario en su dirección y sentido. Un vector unitario en su dirección, la del vector $\vec{r}$, será:

$$\vec{u}_{\vec{r}} = \frac{1}{|\vec{r}|} \vec{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1,0,1)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2} = 2$$

Entonces:

$$\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \vec{u}_{\vec{r}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1,0,1)$$

Conocido el vector, podemos calcular el extremo **C**:

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{A} (0, -1, 0) \\
 \swarrow \\
 \mathbf{C} (a, b, c)
 \end{array}
 \quad
 \overrightarrow{AC} = \frac{2}{\sqrt{2}} (1, 0, 1)$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} (1, 0, 1) = (a - 0, b + 1, c - 0) \rightarrow \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2}} = a \\ 0 = b + 1 \rightarrow b = -1 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} = c \end{cases}$$

$$\mathbf{C} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, -1, \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = (\sqrt{2}, -1, \sqrt{2})$$

Para calcular D, seguimos el mismo procedimiento

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{B} (0, 1, 0) \\
 \swarrow \\
 \mathbf{D} (d, e, f)
 \end{array}
 \quad
 \overrightarrow{BD} = \frac{2}{\sqrt{2}} (1, 0, 1)$$

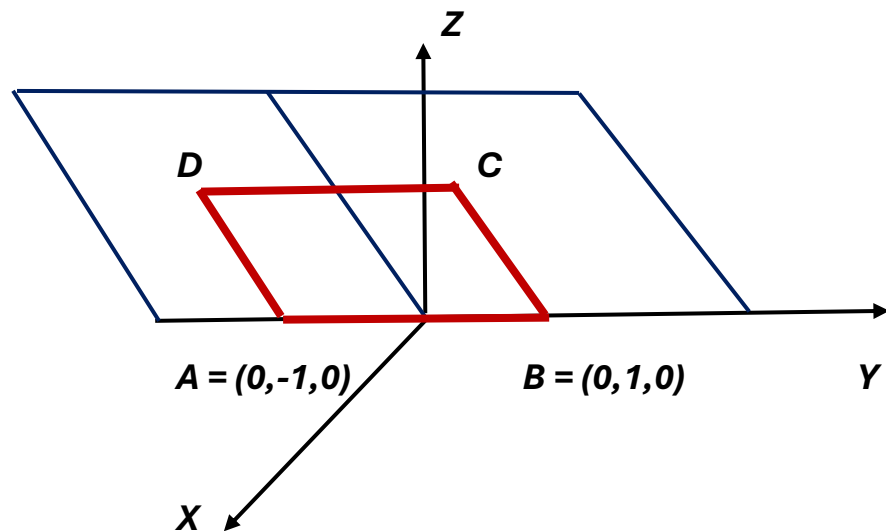
$$\frac{2}{\sqrt{2}} (1, 0, 1) = (d - 0, e - 1, f - 0) \rightarrow \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2}} = d \\ 0 = e - 1 \rightarrow e = 1 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} = f \end{cases}$$

$$D = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, 1, \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = (\sqrt{2}, 1, \sqrt{2})$$

Queremos decir que habría otro cuadrado solución, con los puntos **C** y **D** “**hacia el otro lado**”, eligiendo el vector producto vectorial que nos ha permitido conocer $\vec{r}$ en sentido contrario. En ese caso, el vector sería

$$\vec{r} = (-1, 0, -1)$$

Como hemos dicho al principio, si dibujamos según unos ejes coordenados los datos del problema, y por su simplicidad en este caso, podemos resolver el problema de una manera más “visual”:



De la figura podemos deducir fácilmente que la coordenada “**y**” del vértice **D** es **y = -1** y la del vértice **C** es **y = 1**. Como además tienen que estar en el plano **z = x**, **son puntos de la forma:**

$$C = (x, 1, x)$$

$$D = (x, -1, x)$$

Para calcular el valor de “**x**”, aplicamos a la condición de que sus distancias a los otros dos vértices son iguales al lado del cuadrado, **L = 2** calculado anteriormente:

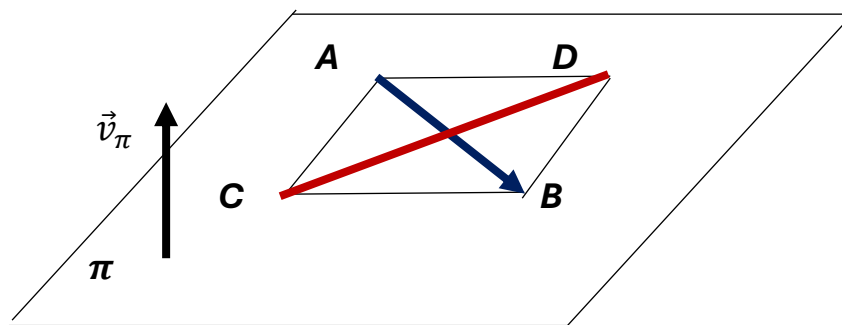
$$d(CB) = 2 \rightarrow \overrightarrow{CB} = (x, 0, x) \rightarrow \sqrt{2x^2} = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$d(DA) = 2 \rightarrow \overrightarrow{DB} = (x, 0, x) \rightarrow \sqrt{2x^2} = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

El valor positivo corresponde a los puntos dibujados. El valor negativo serían los vértices si el cuadrado está “por detrás”, también válidos. Como respuesta tenemos entonces:

$$\begin{aligned} C &= (\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}) \text{ o } (-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2}) \\ D &= (\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}) \text{ o } (-\sqrt{2}, -1, -\sqrt{2}) \end{aligned}$$

b)



Los puntos buscados, **C** y **D**, hemos de ver que está en la recta **CD perpendicular a la diagonal AB**. La ecuación de esta recta será, por ello, fundamental para calcularlos. Como también esta recta está en el plano, su vector ha de ser perpendicular a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\vec{v}_\pi$. Por lo tanto, tendrá como vector director al producto vectorial de ambos vectores:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (0, 2, 0) \\ \vec{v}_\pi &= (-1, 0, 1) \end{aligned} \rightarrow \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2, 0, 2)$$

Como además pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ su ecuación será:

$$\begin{aligned} \vec{v}_r &= (2, 0, 2) \parallel (1, 0, 1) \\ PM(\overline{AB}) &= \left(\frac{0+0}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{0+0}{2} \right) = (0, 0, 0) \rightarrow r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1} \end{aligned}$$

Los puntos **C** y **D** están sobre esa recta. Los pondremos entonces en paramétricas:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \rightarrow C \text{ y } D \equiv (t, 0, t)$$

Por último, para calcular el valor del parámetro “**t**” aplicaremos la condición de que su distancia al centro del cuadrado, el punto **PM** = (0,0,0) es la misma que la distancia de los puntos **A** y **B** a **PM**:

$$d(A, PM) = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 0^2} = 1 \rightarrow$$

$$d(C, PM) = d(D, PM) = 1 \rightarrow \sqrt{t^2 + 0^2 + t^2} = 1 \rightarrow 2t^2 = 1 \rightarrow$$

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \begin{aligned} C &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ D &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 6 (3d)

Sean las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 5 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad t \in R$$

- (1.5 puntos) Estudie la posición relativa de las rectas dadas y deduzca la distancia entre ellas.**
- (0.5 puntos) Determine una ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s**
- (0.5 puntos) Sean P y Q los puntos de las rectas r y s , respectivamente, que están contenidos en el plano de ecuación $z = 0$. Calcule una ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q**

a)

Según se ha visto en la teoría, para calcular la posición relativa de dos rectas necesitamos conocer sus vectores directores y un vector que vaya de un punto de una de ellas a otro punto de la otra. Si el rango de esos tres vectores es tres, las rectas se cruzan. Si el rango es dos se cortarían o son paralelas. Veamos.

$$r \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$P_r \equiv y = 0 \rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \\ -2z + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow P_r = \left(-2, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$s \equiv \begin{cases} \vec{v}_s = (-2, 2, 1) \\ P_s = (2, 5, 0) \end{cases}$$

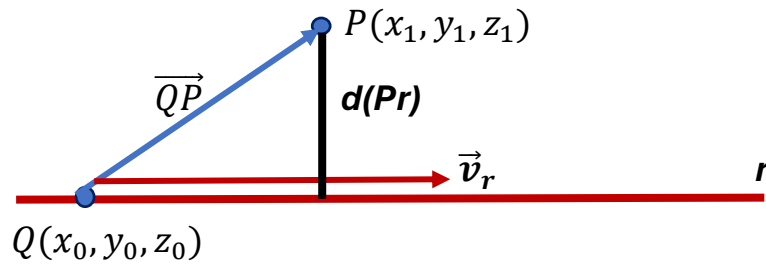
Aplicando lo dicho en el primer párrafo:

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (-2, 2, 1) \\ \vec{v}_s = (-2, 2, 1) \\ \overrightarrow{P_r P_s} = \left(4, 5, -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Vemos que los dos vectores directores son el mismo y, dado que el vector que va de un punto de la recta r a otro punto de la recta s no es paralelo a los directores, en ese caso las dos rectas serían la misma, **las dos rectas son paralelas**.

Para calcular la distancia entre ambas basta entonces con calcular la distancia de un punto de una de ellas a la otra. Vamos a coger el punto calculado de la recta s y su distancia a la recta r . Para ello aplicamos la fórmula de la distancia de punto a recta:

Sea la recta r y el punto P . La fórmula que utilizaremos para calcular la distancia del punto a la recta es:



La distancia del punto a la recta, $d(Pr)$, la calculamos según

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}$$

En nuestro caso:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{P_r P_s} &= \left(4, 5, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow d = \frac{\left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 5 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|(6, 3, 18)|}{3} \rightarrow \\ \vec{v}_r &= (-2, 2, 1) \\ d &= \frac{\sqrt{6^2 + 3^2 + 18^2}}{3} = \frac{\sqrt{369}}{3} = \sqrt{41} \, u \end{aligned}$$

b)

Ecuación del plano que contiene a las dos rectas. Conocemos dos vectores en los que se apoya, $\vec{v}_r$ y $\overrightarrow{P_r P_s}$, y un punto por el que pasa, cualquiera de las dos rectas, por ejemplo $P_s = (2, 5, 0)$. Aplicando la teoría, la ecuación de este plano será:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_r P_s} &= \left(4, 5, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z-0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \\ \vec{v}_r &= (-2, 2, 1) \\ (x-2)(-6) - (y-5)(-3) + (z-0)(-18) &= 0 \rightarrow \\ -6x + 3y - 18z - 3 &= 0 \rightarrow \mathbf{2x - y + 6z + 1 = 0} \end{aligned}$$

c)

Sean P y Q los puntos de las rectas r y s , respectivamente, que están contenidos en el plano de ecuación $z = 0$. Calcule una ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q .

Calculamos la intersección de ambas rectas con el plano $z = 0$ para conocer los puntos P y Q

$$P \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \rightarrow x = -1 \\ y - 2z + 1 = 0 \rightarrow y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow P = (-1, -1, 0)$$

$$Q \equiv \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 5 + 2t \\ z = t \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow t = 0 \rightarrow Q = (2, 5, 0)$$

La ecuación de la recta pedida, que llamaremos t , tendrá como vector director el vector $\overrightarrow{PQ}$ y pasa por cualquier punto de los dos. Elegimos el punto P :

$$\overrightarrow{PQ} = (3, 6, 0) \parallel (1, 2, 0) \rightarrow t \equiv \frac{x + 1}{1} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z}{0}$$

Ejercicio 7 (3d)

Con un dispositivo laser situado en el punto $P(1,1,1)$ se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta de ecuaciones

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = 90 \end{cases}$$

- a) (0.5 puntos) Calcule un vector director de r y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide en el plano $z = 0$**
- b) (1.25 puntos) Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo laser.**
- c) (0.75 puntos) Determine el ángulo entre el plano π de ecuación $x + y = 2$ y la recta r .**
- d)**

a)

Como debemos de saber por la teoría, el vector de la recta dada como intersección de dos planos lo podemos calcular de varias maneras. Una es resolviendo el sistema de las dos ecuaciones con dos incógnitas que representan la ecuación de la recta. Este sistema saldrá compatible indeterminado y el vector de la recta serán los coeficientes del parámetro. Este método es el más “intuitivo” pero es más corto el saber que, al ser la recta perpendicular a los dos planos de los que es intersección, su vector será perpendicular a los vectores directores de los planos. Por lo tanto, el vector de la recta se puede calcular como el producto vectorial de los dos vectores directores de los planos. Es el que utilizamos aquí:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot 1 - \vec{j} \cdot (-2) + \vec{k} \cdot 1 = (1, 2, 1)$$

La posición de la partícula cuando llegue al plano $z = 0$ será la intersección de su trayectoria con dicho plano, o lo que es lo mismo, la

intersección de la recta que representa su trayectoria con ese plano.
Por lo tanto, tenemos que resolver el sistema:

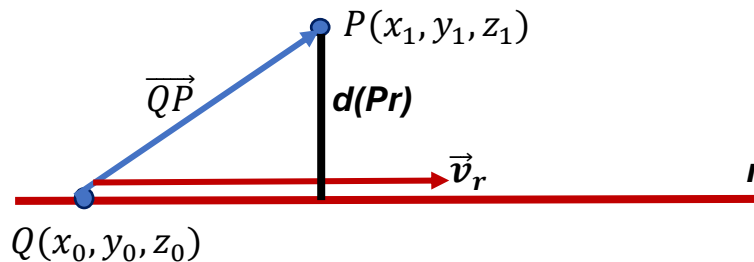
$$\begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = 90 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 90 \\ 2 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx |2^a F \rightarrow 2^a F + 1^a F \cdot (-2)| \approx$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 90 \\ 0 & -1 & 2 & -170 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3^a F \rightarrow z = 0 \\ 2^a F \rightarrow y = 170 \\ 1^a F \rightarrow x = 90 + y = 260 \end{cases}$$

b)

Tenemos que calcular la distancia entre un punto y una recta.
Según la teoría que debemos de conocer, esta viene dada por:

Sea la recta r y el punto P . La fórmula que utilizaremos para calcular la distancia del punto a la recta es:



La distancia del punto a la recta, $d(Pr)$, la calculamos según

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}$$

Donde el vector $\overrightarrow{QP}$ va desde un punto cualquiera de la recta, Q , al punto P .

El vector $\vec{v}_r$ es el vector director de la recta

En nuestro caso:

$$\vec{v}_r = (1, 2, 1)$$

El punto Q es un punto de la recta que calculamos dando un valor a cualquier variable en las ecuaciones de la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = 90 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1^a E \rightarrow 0 - y = 10 \rightarrow y = -10 \rightarrow \mathbf{Q} = (0, -10, -90) \\ 2^a E \rightarrow 0 - z = 90 \rightarrow z = -90 \end{cases}$$

El punto P es el que corresponde al laser $P(1,1,1)$. Entonces:

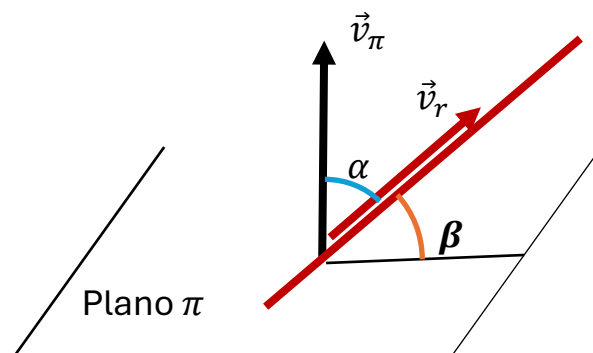
$$\begin{cases} \overrightarrow{QP} = (P - Q) = (1, 11, 91) \\ \vec{v}_r = (1, 2, 1) \end{cases} \rightarrow d(P, r) = \frac{|(1, 11, 91) \times (1, 2, 1)|}{|(1, 2, 1)|} =$$

$$= \frac{\left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 11 & 91 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|(-171, 90, -9)|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{171^2 + 90^2 + 9^2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{37422}{6}} =$$

$$d = \sqrt{6237} \text{ u.}$$

c)

Para calcular el ángulo que forma un plano con una recta basta conocer el ángulo que forman el vector director de la recta y el vector director del plano, ángulo que llamamos α en la figura:



Como se observa, el ángulo entre la recta y el plano es β , complementario de α . Para calcular α aplicamos la fórmula que proviene del producto escalar y que nos da su coseno:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_r|} = \text{sen}\beta$$

Que, como debemos de saber al ser ángulos complementarios, coincide con el seno de β , que es el que nos piden:

$$\begin{aligned} \vec{v}_r &= (1, 2, 1) \\ \vec{v}_\pi &= (1, 1, 0) \end{aligned} \rightarrow \text{sen}\beta = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} \rightarrow$$
$$\text{sen}\beta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \beta = 60$$

Ejercicio 8 (3d)

Sean el plano

$$\pi \equiv x + y + z = 1$$

La recta

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 \end{cases} \lambda \in R$$

Y el punto

$$P(0, 1, 0)$$

- a) (0.5 puntos) Verifique que la recta está contenida en el plano y que el punto también pertenece al mismo plano.**
- b) (0.75 puntos) Halle una ecuación de la recta contenida en el plano π que pase por P y sea perpendicular a la recta r_1**
- c) (1.25 puntos) Calcule la ecuación de la recta r_2 , que pase por P y sea paralela a r_1 . Halle el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las dos rectas, r_1 y r_2 .**

a)

Para demostrar que el punto pertenece al plano basta con comprobar que las coordenadas del punto cumplen la ecuación del plano

$$\pi \equiv x + y + z = 1 \rightarrow 0 + 1 + 0 = 1$$

$P(0,1,0)$

Efectivamente, las coordenadas cumplen la ecuación del plano.

Comprobar que la recta está contenida en el plano se puede hacer de varias maneras. Nos parece que la más simple de ver es demostrar que dos de sus puntos están en el plano:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \rightarrow Q = (1, 1, -1) \\ \lambda = 1 \rightarrow R = (2, 0, -1) \end{cases} \rightarrow$$

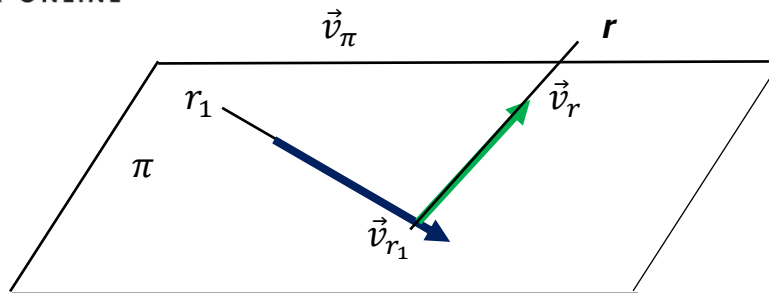
$$x + y + z = 1 \rightarrow \begin{cases} Q(1, 1, -1) \rightarrow 1 + 1 - 1 = 1 \\ R(2, 0, -1) \rightarrow 2 + 0 - 1 = 1 \end{cases}$$

Efectivamente, los dos puntos cumplen la ecuación del plano y, por lo tanto, pertenecen a él.

b)

Para calcular la ecuación de una recta nos hace falta conocer un punto por el que pasa, en este caso el punto P conocido, y un vector que indique su dirección. En nuestro caso, y según la figura:





Deberíamos de ver que el vector de la recta pedida es perpendicular al vector de la recta r_1 , por condición del enunciado, y perpendicular al vector director del plano, por estar contenida en él. Su dirección será perpendicular a los dos vectores y, por lo tanto, la que marque su producto vectorial:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_\pi \times \vec{v}_{r_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1\vec{i} + 1\vec{j} - 2\vec{k}$$

Ya que el vector de la recta r_1 son los coeficientes del parámetro

λ , $\vec{v}_{r_1} = (1, -1, 0)$ y el vector director del plano son los coeficientes de las variables x, y y z .

Conocido el vector que indica su dirección y el punto por el que pasa, la recta r es:

$$r \equiv \left| \begin{matrix} P(0,1,0) \\ \vec{v}_r = (-1,1,-2) \end{matrix} \right| \rightarrow \frac{x-0}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-0}{-2}$$

c)

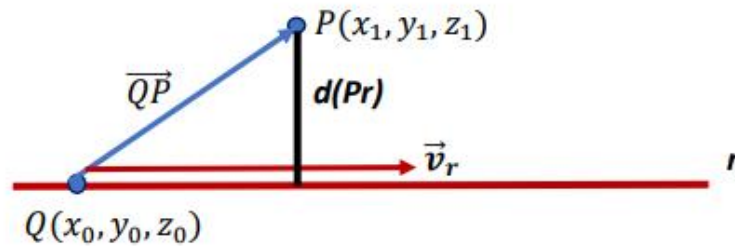
Para calcular la recta r_2 ya tenemos el punto, P , y el vector que, por ser paralela a r_1 , será el mismo $\vec{v}_{r_1} = (1, -1, 0)$. Por lo tanto:

$$r_2 \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-0}{0}$$

El lado del cuadrado, dado que sus lados están en ambas rectas paralelas, será la distancia entre ellas. Para ello, calculamos la distancia entre un punto de ellas, P , perteneciente a r_2 , a la otra recta,

r_1 . Para ello, aplicamos la fórmula de la distancia de un punto a una recta:

Sea la recta r y el punto P . La fórmula que utilizaremos para calcular la distancia del punto a la recta es:



La distancia del punto a la recta, $d(Pr)$, la calculamos según

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}$$

Donde el vector $\overrightarrow{QP}$ va desde un punto cualquiera de la recta, Q , al punto P .

En nuestro caso:

$$\begin{aligned} P(0,1,0) &\in r_2 \\ Q(1,1,-1) &\in r_1 \rightarrow \overrightarrow{QP} = (-1,0,1) \rightarrow d = \frac{\left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \\ \vec{v}_{r_1} &= (1,-1,0) \\ &= \frac{|(1,1,1)|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \rightarrow A = L^2 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$