PROBLEMAS SOBRE EL TEOREMA DEL TRABAJO

El teorema del trabajo o de la energía es una herramienta muy útil y cómoda para relacionar dos posiciones por las que pasa un cuerpo y las velocidades en esas posiciones.

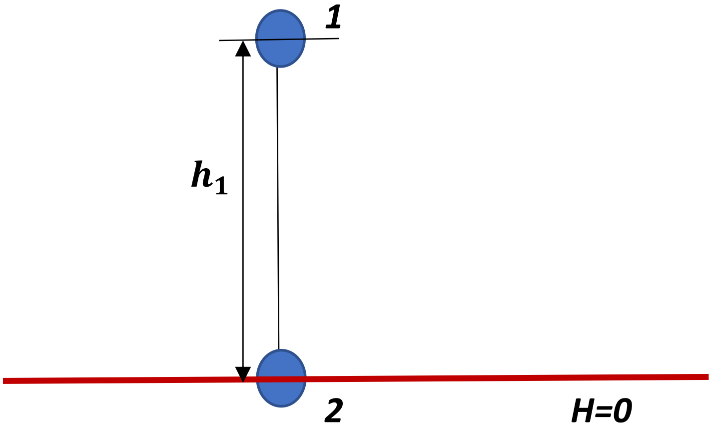
Así como para aplicar correctamente las leyes de Newton es fundamental un diagrama de las fuerzas que actúan y tener muy claro si se trata de una rotación o de una traslación, **para aplicar correctamente el teorema de la energía es imprescindible un dibujo donde aparezcan claramente las fuerzas, entre qué posiciones se va a aplicar el teorema y un nivel de alturas cero. Dibujos confusos llevan muy fácilmente a errores.**

Problema 1

Aplicando el teorema de la energía, calcular la velocidad de un cuerpo al llegar al suelo si se suelta desde una altura h.

Creemos que es muy conveniente hacer un claro dibujo de la situación. Hemos de ver dos posiciones y sus velocidades para relacionarlas por el teorema.

En nuestro caso, el cuerpo cae desde una altura ***h*** con velocidad inicial cero ("se suelta") desde el punto ***1.*** Conocemos esa posición, ***h***. La velocidad en ***1*** ya sabemos que es nula. Del otro punto, ***2,*** sobre el que nos preguntan la velocidad, conocemos la posición, el suelo, ***h=0.*** Para calcular la velocidad que nos preguntan, aplicamos el teorema que nos relaciona esas dos posiciones con sus velocidades, el teorema del trabajo.



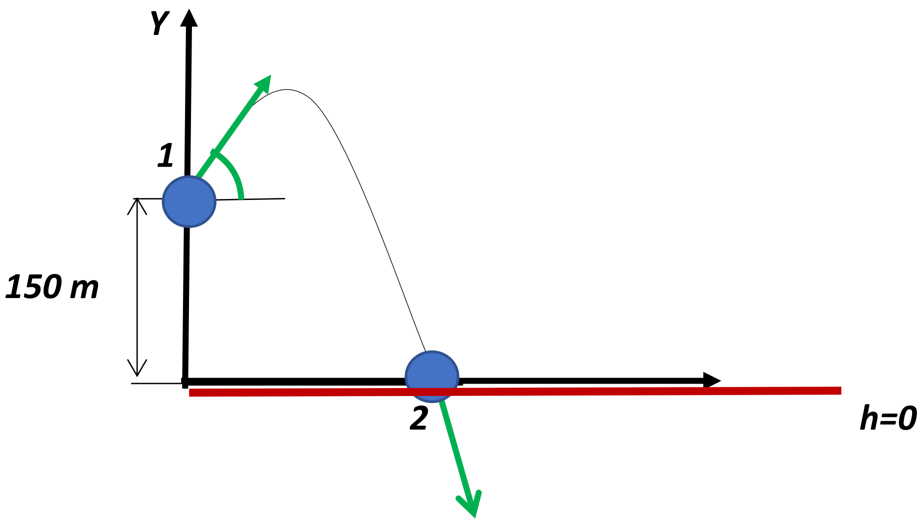
$$\boldsymbol{W_{NC} = \Delta E_m}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{W_{nc}} = \boldsymbol{0} \ (sólo\ actúa\ el\ peso\ que\ es\ conservativo) \\ \boldsymbol{\Delta E_m} = \begin{cases} E_{m1} = mgh_1 \quad (v_1 = 0 \to E_{c1} = 0) \\ E_{m2} = \frac{1}{2}mv_2^2 \ \ (h_2 = 0 \to E_{2p} = 0) \end{cases} \to \boldsymbol{\Delta E_m = \frac{1}{2}mv_2^2 - mgh_1} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{0 = \frac{1}{2}mv_2^2 - mgh_1 \to v = \sqrt{2gh_1}}$$

Problema 2

Desde una altura de 150 m se lanza un cuerpo con una velocidad de 40 m/s formando un ángulo de 60 grados con la horizontal. Calcular el módulo de la velocidad cuando llega al suelo aplicando el teorema del trabajo.



Aplicamos el teorema entre los estados 1 y 2. La única fuerza que actúa es el peso y, al igual que en el caso anterior, **el trabajo de las fuerzas no conservativas es nulo al no haber ninguna y por ello se conservará la energía. Para medir energías potenciales elegimos *h=0* el nivel marcado por la línea roja.**

$$W_{nc} = 0$$

$$E_{m1} = mgh + \frac{1}{2}mv^2 = mg \cdot 150 + \frac{1}{2}m40^2$$

$$E_{m2} = \frac{1}{2}mv^2$$

Y aplicando el teorema:

$$W_{nc} = \Delta E_m \rightarrow 0 = \frac{1}{2}mv^2 - \left(mg150 + \frac{1}{2}m40^2\right)$$

En esta ecuación las masas se simplifican, ya que es factor de todos los sumandos.

Y despejando la velocidad:

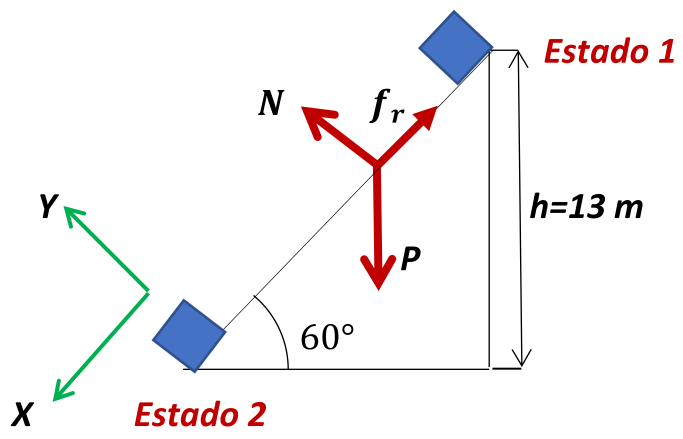
$$v = \sqrt{2\left(150g + \frac{1}{2}1600\right)} = \sqrt{4600} = 10\sqrt{46}\ {}^{m}/_{s} = \mathbf{67{,}82}\ {}^{\boldsymbol{m}}/_{\boldsymbol{s}}$$

Hemos de fijarnos que nos habría salido el mismo resultado, aunque el ángulo de salida hubiera sido otro, ya que como vemos en la resolución, ese dato no nos ha hecho falta para calcular la velocidad. **Si el módulo de la velocidad inicial es un valor dado, también lo será el módulo de la velocidad al llegar al suelo, independientemente del ángulo de salida**.

Problema 3

Por un plano inclinado 60 grados con la horizontal se deja caer un cuerpo desde 13 m de altura. Siendo el coeficiente de rozamiento dinámico 0,3 calcular, aplicando el teorema del trabajo, la velocidad al llegar al pie del plano inclinado. (Sugerencia: se puede hacer aplicando las leyes de newton y comprobar la igualdad en los resultados)

Diagrama de fuerzas. Esto es independiente de qué ley se va a utilizar. En dinámica, insistimos, el diagrama de fuerzas es fundamental.



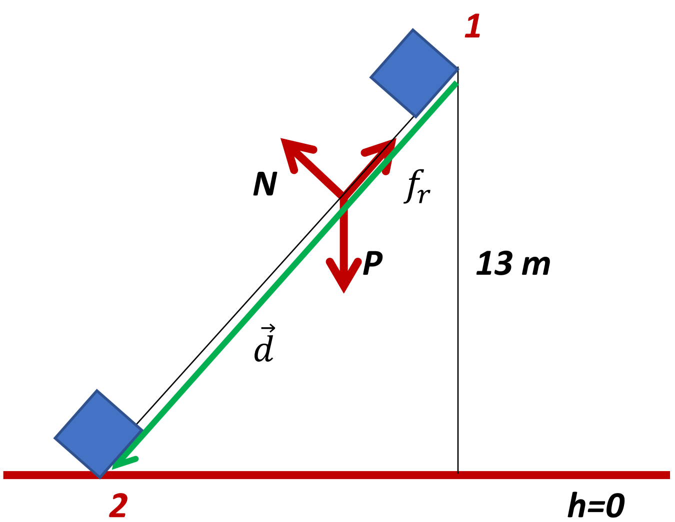
La hipotenusa del triángulo mide:

$$13 = d \cdot sen60 \rightarrow d = \frac{13}{sen60} = \frac{26}{\sqrt{3}}\ m$$

Necesitamos saber cuánto valen las fuerzas, la normal, el rozamiento. Para ello, hacemos lo que hemos hecho siempre para una traslación. Se descomponen las fuerzas sobre los ejes ***X*** de la trayectoria e ***Y*** perpendicular para **saber lo que vale la fuerza de rozamiento y la normal**. Como ya sabemos (consultar los problemas sobre leyes de Newton-traslación)

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N = mgcos60 = mg\frac{1}{2} \rightarrow F_r = \mu N = 0{,}3\frac{1}{2}mg = 0{,}15mg$$

Además de las fuerzas, dibujamos el estado inicial, arriba posición ***1***, y el estado final abajo en la posición ***2***, marcamos el nivel de altura cero, en rojo, y dibujamos el vector desplazamiento, en verde, todo ello para aplicar el teorema del trabajo con rigor.



Teorema:

$$W_{nc} = \Delta E_m$$

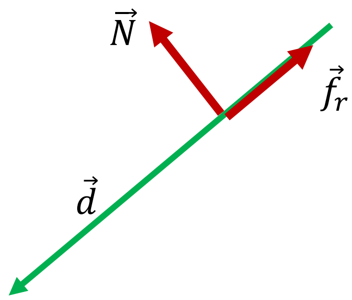
Empezamos por el miembro de la izquierda, calculando el trabajo de las fuerzas no conservativas. Las fuerzas no conservativas son la normal y la fuerza de rozamiento:

$W_N = N \cdot d \cdot cos90 = 0$

$$W_{fr} = f_r \cdot d \cdot cos180 = \left| \begin{matrix} f_r = 0.15mg \\ d = \frac{26}{\sqrt{3}} \end{matrix} \right| \rightarrow$$

$$W_{fr} = 0{,}15mg \cdot \frac{26}{\sqrt{3}} \cdot cos180 = -\frac{26 \cdot 0{,}15}{\sqrt{3}} mg = -\frac{\mathbf{39}}{\mathbf{10\sqrt{3}}} \boldsymbol{mg}$$

Donde ***90 y 180*** son los ángulos que el vector normal y el vector fuerza de rozamiento forman respectivamente con el vector desplazamiento, como se ve en la figura:



Por lo tanto, sumando todos

$$\boldsymbol{W_{nc} = 0 - \frac{39}{10\sqrt{3}} mg} \; (1)$$

Ahora calculamos la variación de energía mecánica:

$$\begin{cases} E_{m1} = mgh = mg13 \\ E_{m2} = \frac{1}{2} mv^2 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{\Delta E_m = \frac{1}{2} mv^2 - mg13} \; (2)$$

Y, aplicando el teorema, igualando las expresiones ***(1) y (2):***

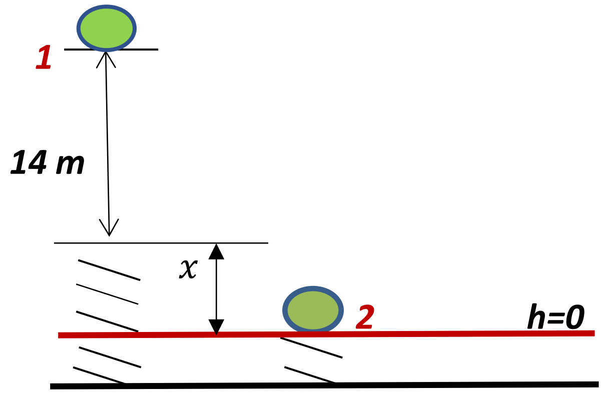
$$\boldsymbol{-\frac{39}{10\sqrt{3}} mg = \frac{1}{2} mv^2 - mg13}$$

De donde, simplificando el factor ***m***

$$\boldsymbol{v \cong 14,66\ {}^{m}/_{s}}$$

Problema 4

Desde una altura de 14 m sobre un muelle de constante elástica 1000N/m se deja caer un cuerpo de 17 Kg. Calcular la compresión máxima del muelle cuando el cuerpo cae sobre él y acaba parándose.



Aplicamos el teorema del trabajo entre los puntos ***1 y 2***. Insistimos en que es fundamental un diagrama donde se reflejen claramente las posiciones y las distancias, conocidas o no, así como el nivel de alturas cero. Muchos de los errores son debidos a dibujos “confusos”.

$$W_{nc} = \Delta E_m$$

Trabajo de las fuerzas no conservativas: las únicas fuerzas que actúan durante el proceso de caída son el peso y la fuerza producida por el muelle durante una distancia que hemos llamado ***x*** en la figura. Por lo tanto, dado que esas dos fuerzas son conservativas, el trabajo de las fuerzas no conservativas es cero porque no hay ninguna.

$$\boldsymbol{W_{nc} = 0}$$

Ahora, calculamos la variación de energía mecánica:

$$\begin{cases} E_{m1} = mgh\ (\boldsymbol{v = 0 \rightarrow E_c = 0}) \rightarrow \boldsymbol{E_{m1}} = 17 \cdot 10(14 + x) = \boldsymbol{170(14 + x)} \\ E_{m2} = \frac{1}{2}kx^2(x{:}\ deformación\ del\ muelle)\ (\boldsymbol{v = 0\ y\ h = 0}) \rightarrow \boldsymbol{E_{m2} = \frac{1}{2}1000x^2} \end{cases}$$

Y aplicando el teorema:

$$W_{nc} = E_{m2} - E_{m1}$$

$$0 = 500x^2 - 170(14 + x)$$

$$\boldsymbol{x \cong 2,36\ m}$$