CONCIONES DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD. VECTORES LIBRES Y LIGADOS.

En estos pocos problemas vamos a practicar las condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre vectores y los conceptos de vectores libres, ligados.

Problema 1

Dados los vectores $\vec{v}=(1,m,n)$ y $\vec{t}=(2,-1,5)$ deducir los valores de m y n para que sean: a) paralelos b) perpendiculares.

Hemos de recordar que para que **dos vectores sean paralelos sus componentes han de ser proporcionales o, de otra forma, pero equivalente, que su producto vectorial sea cero.** Aplicamos primero la condición de proporcionalidad entre sus componentes:

$$\frac{1}{2}=\frac{m}{-1}=\frac{n}{5}$$

Que constituyen dos ecuaciones. Si cogemos la primera igualdad:

$$\frac{1}{2}=\frac{m}{-1}\rightarrow 2m=-1\rightarrow \boldsymbol{m}=\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}$$

Igualando el primer término con el último:

$$\frac{1}{2}=\frac{n}{5}\rightarrow \boldsymbol{n}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$$

De la segunda manera, aplicando que su producto vectorial es cero, tenemos:

$$\vec{v}\times\vec{t}=0\rightarrow\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & m & n\\ 2 & -1 & 5\end{vmatrix}=\vec{\imath}\begin{vmatrix}m & n\\ -1 & 5\end{vmatrix}-\vec{\jmath}\begin{vmatrix}1 & n\\ 2 & 5\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & m\\ 2 & -1\end{vmatrix}=$$

$$(5m+n)\vec{\imath}-(5-2n)\vec{\jmath}+(-1-2m)\vec{k}\rightarrow\begin{cases}5m+n=0\\ -5+2n=0\\ -1-2m=0\end{cases}\rightarrow$$

De la segunda ecuación:

$$-5 + 2n = 0 \rightarrow \boldsymbol{n} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$$

De la tercera:

$$-1 - 2m = 0 \rightarrow \boldsymbol{m} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

Pero también ha de cumplirse la primera para estos valores:

$$5m + n = 0 \rightarrow 5\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2} = 0$$

Como, efectivamente, vemos que se cumple. Por lo tanto, esos valores son los buscados.

Para que sean perpendiculares, hemos de recordar que su producto escalar ha de ser cero.

$$\vec{v} \cdot \vec{t} = 0 \rightarrow 1 \cdot 2 + m \cdot (-1) + n \cdot 5 = 0 \rightarrow$$

$$\boldsymbol{-m + 5n = -2}$$

Como vemos, hay muchas soluciones, hay muchos vectores que cumplen la condición de perpendicularidad, siempre que ***m*** y ***n*** cumplan la ecuación anterior.

Problema 2

Calcular el valor de "a" para que los vectores $\vec{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3})$ $\vec{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{3})$ y $\vec{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{3}} = (\boldsymbol{m}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$ sean: a) libres, b) ligados.

Podemos enfocar el problema de varias maneras. La primera sería aplicar la definición de vectores libres, pero nos parece mejor la segunda. Recordando que el rango de una matriz es el número de filas linealmente independientes que contiene, podemos llegar a la conclusión de que esta familia de vectores será libre si el rango de la matriz formada por ellos es tres, ligada si es menor. Recordando también que el rango de una matriz coincide con el orden del mayor determinante que se puede formar con ella, podemos y debemos llegar a la conclusión de que, si el determinante formado por ellos es distinto de cero, el rango de la matriz será tres y, por lo tanto, los vectores serán libres. Ligados en caso contrario. Calculamos entonces el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ m & 1 & 2 \end{vmatrix} = |Sarrus| = 6m - 3 - (3 - 4) = 6m + 4$$

Serán ligados si:

$$6m + 4 = 0 \rightarrow \boldsymbol{m} = -\frac{4}{6} = -\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

Libres en el caso contrario:

$$\boldsymbol{m} \neq -\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$