TANGENCIAS. EXTREMOS RELATIVOS

En estos ejercicios vamos a practicar algo muy importante que es el concepto geométrico de la derivada. Recordamos que la derivada de una función en un punto definido por la variable ***"x"*** **es la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.** Esto nos permitirá resolver problemas sobre tangencias y también sobre extremos relativos, máximo y mínimos. **En los extremos relativos la recta tangente es horizontal, de pendiente cero y, por lo tanto, la derivada en esos puntos ha de valer cero**.

Damos por hecho que se conocen los ejemplos de la teoría para no duplicar problemas.

Ejemplo 1

Calcular el punto, o los puntos, en los que la recta tangente a la función.

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 9x - 3}$$

Es paralela a la recta

$$\boldsymbol{y = 3x - 3}$$

Calcular también las ecuaciones de esas rectas tangentes.

Hemos de saber que, si dos rectas son paralelas, tienen la misma pendiente.

Como la recta dada tiene pendiente ***3 (coeficiente de "x" en su expresión)***, **la tangente pedida**, al ser paralela a ella debe tener **también pendiente *3***. Por lo tanto, estamos buscando un punto en donde la tangente tenga pendiente ***3,*** **o lo que es lo mismo, un punto cuya derivada sea igual a *3***.

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 9x - 3 \rightarrow y' = \frac{1}{3}3x^2 - \frac{5}{2}2x + 9 = x^2 - 5x + 9$$

$$y' = \boldsymbol{x^2 - 5x + 9 = 3} \rightarrow$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = 2} \\ \boldsymbol{x = 3} \end{cases}$$

Sabemos entonces que para esos dos valores de ***"x"*** la derivada vale ***3*** y las tangentes en ellos serán paralelas a la recta dada. Para calcular las ecuaciones de ambas tangentes basta calcular los valores de la función para esos valores de ***"x"*** para conocer los puntos por los que pasan y aplicar la fórmula punto-pendiente de una recta. Hacemos una de ellas nada más.

$$x = 2 \rightarrow y(2) = \frac{1}{3}2^3 - \frac{5}{2}2^3 + 9 \cdot 2 - 3 = -\frac{7}{3}$$

$$r \equiv \begin{cases} \left(2, -\frac{7}{3}\right) \\ m = 3 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{y - \left(-\frac{7}{3}\right) = 3(x - 2)}$$

Ejemplo 2

Calcular los puntos de la función

$$\boldsymbol{y = x^2 + 2x - 3}$$

En los que la recta tangente es perpendicular a la recta

$$\boldsymbol{y = 4x + 3}$$

La pendiente de la recta que nos dan es ***4***. La recta tangente que se pide ha de ser perpendicular a esta. Hemos de saber que, si dos rectas son perpendiculares, la relación entre sus pendientes es:

$$\boldsymbol{m \cdot m' = -1}$$

Por lo tanto, en nuestro caso, la pendiente de la tangente pedida será:

$$4 \cdot m' = -1 \rightarrow \boldsymbol{m' = \frac{-1}{4}}$$

Hemos de buscar entonces puntos en donde la derivada valga ese valor:

$$y' = 2x + 2 = -\frac{1}{4} \rightarrow \boldsymbol{x = -\frac{9}{8}}$$

En este caso, sólo hay un punto en donde la recta tangente a la curva es perpendicular a la dada:

$$\boldsymbol{x = -\frac{9}{8} \rightarrow y\left(-\frac{9}{8}\right) = \left(-\frac{9}{8}\right)^2 + 2\left(-\frac{9}{8}\right) - 3}$$

Siendo esas las coordenadas del punto pedido.

Ejemplo 3

Calcular los valores de los parámetros "a" y "b" sabiendo que la función

$$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + 3}$$

Tiene un extremo relativo en el punto P (2,-2)

La primera idea que tenemos que ver es que, si la función pasa por ese punto, sus coordenadas han de cumplir la ecuación de la función. Por lo tanto, sustituyendo esas coordenadas del punto en la función:

$$-2 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 3 \rightarrow \boldsymbol{-2 = 4a + 2b + 3} \ \ (1)$$

Y ya tenemos la primera ecuación en las incógnitas ***"a" y "b".***

La segunda nos ha de venir claramente de la otra condición que nos dicen, que es un extremo relativo. Sabemos entonces que **la derivada en ese punto ha de ser cero:**

$$y' = 2ax + b \rightarrow \begin{cases} y' = 0 \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{0 = 2a \cdot 2 + b} \ \ (2)$$

Para llegar a la solución tenemos que resolver el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones ***(1) y (2)***

$$\begin{cases} 2 = 4a + 2b + 3 \rightarrow \boldsymbol{-1 = 4a + 2b} \\ \qquad\qquad \boldsymbol{0 = 4a + b} \end{cases}$$

Algo que obviamos en el contexto de este nivel.