RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA

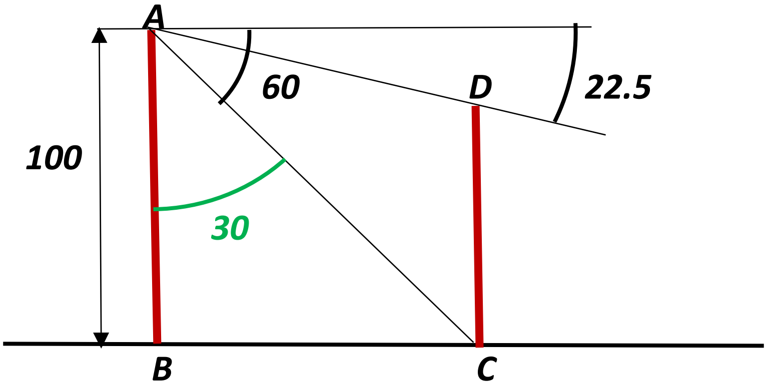
En estos problemas vamos a seguir repasando lo dicho en la teoría y en los ejemplos del apartado “contenidos”. Son, por ello, de mayor dificultad. Lo que se pretende es demostrar que los pocos teoremas de que disponemos son suficientes para resolver cualquier sistema de triángulos o polígonos, sólo es cuestión “mirar” tranquilamente. También decir que la manera de resolver un problema, como suele suceder, no es única, puede haber más cortas o largas, pero todas son válidas.

Ejemplo 1

Desde la terraza de un edificio de 100 metros observamos la azotea y el “pie” de un edificio más bajo que está enfrente. La visual entre las azoteas forma 22.5 grados con la horizontal. La visual entre la azotea en la que estamos y el “pie” del edificio de enfrente forma 60 grados con la horizontal. Calcular la altura del edificio que tenemos enfrente y la anchura de la calle. No utilizar calculadora para calcular las razones trigonométricas.

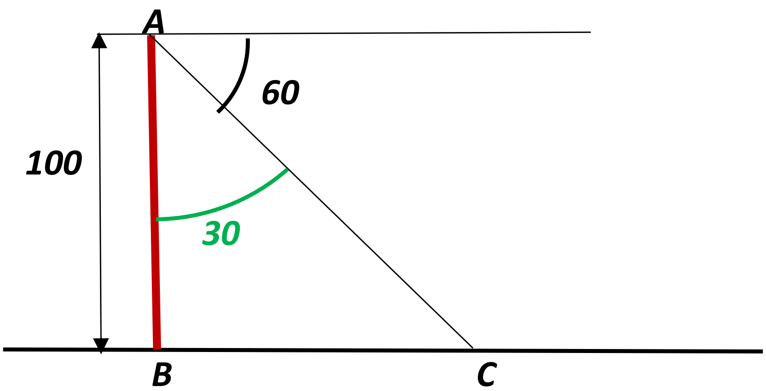
Se supone que, normalmente, el enunciado del dibujo viene representado también con una figura. Sin embargo, también es importante que sepamos reflejar los datos en un dibujo sin que nos den la figura. Veamos.

Dibujamos los dos edificios con dos líneas verticales rojas y las visuales dadas:



En el triángulo rectángulo ***ABC*** debemos de ver que el ángulo ***A*** es de ***30 grados.*** Como conocemos un cateto, la altura del edificio más alto en donde estamos, es sencillo conocer el lado ***BC***, la anchura de la calle pedida, y la hipotenusa ***AC.*** Nos podemos ir ya imaginando que esta hipotenusa ***AC*** nos vendrá bien para estudiar el triángulo ***ADC*** y calcular en él la altura del edificio más bajo que nos han preguntado.

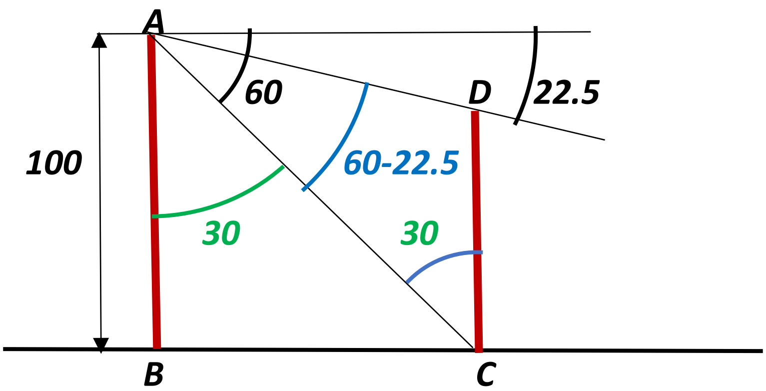
Triángulo ABC

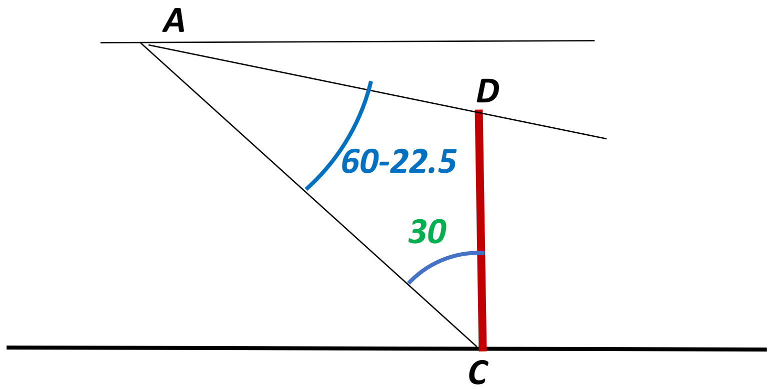


$$cos30 = \frac{100}{AC} \rightarrow \overline{\boldsymbol{AC}} = \frac{100}{cos30} = \frac{\mathbf{200}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$$

$$tg30 = \frac{BC}{100} \rightarrow \overline{\boldsymbol{BC}} = 100tg30 = \frac{\mathbf{100}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$$

La anchura de la calle es la distancia ***BC***. Pasamos a calcular la altura del edificio más bajo. Fijémonos en el triángulo ***ADC***





En este triángulo conocemos el lado ***AC*** y los tres ángulos (el ángulo ***D*** por resta de los otros dos hasta 180).

$$D = 180 - (60 - 22.5 + 30) = \mathbf{90 - 22.5}$$

Lo dejamos así, va a ser sencillo calcular sus razones trigonométricas aplicando las fórmulas, no olvidar que en el enunciado se nos pedía no utilizar calculadora.

Aplicando el teorema de los senos tenemos:

$$\frac{\overline{AC}}{sen(90-22.5)} = \frac{\overline{DC}}{sen(60-22.5)} \to |\overline{AC}| = \frac{200}{\sqrt{3}} \to$$

$$\boldsymbol{\frac{200}{\sqrt{3}sen(90-22.5)} = \frac{\overline{DC}}{sen(60-22.5)}} \quad \mathbf{(1)}$$

En esta ecuación, como vemos, la única incógnita es el lado ***DC,*** que es la altura pedida. Vamos a calcular aparte las razones trigonométricas que aparecen:

$$\boldsymbol{sen(90-22.5)} = cos22.5 = +\sqrt{\frac{1+cos45}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} =$$

$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$$

$$\boldsymbol{sen(60-22.5)} = sen60cos22.5 - cos60sen22.5 =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-cos45}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} =$$

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}}$$

Insistimos, podíamos utilizar sin problemas la calculadora, pero nos parece más interesante, no más corto evidentemente, el practicar las leyes de relación entre las razones trigonométricas de dos ángulos. Sustituyendo estos valores en la ecuación ***(1)***

$$\frac{200}{\sqrt{3}sen(90-22.5)} = \frac{\overline{DC}}{sen(60-22.5)} \to \overline{DC} = \frac{200sen(60-22.5)}{\sqrt{3}sen(90-22.5)} \to$$

$$\boldsymbol{\overline{DC}} = \frac{200\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}\right)}{\sqrt{3}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} = \boldsymbol{\frac{100\left(\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

Aunque se salga del tema, vamos a simplificar la expresión obtenida. Es interesante.

$$\boldsymbol{\frac{100\left(\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = 100 \cdot \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{2}}}} =$$

$$= \left|\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{d}\right| = 100\left(\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\right) =$$

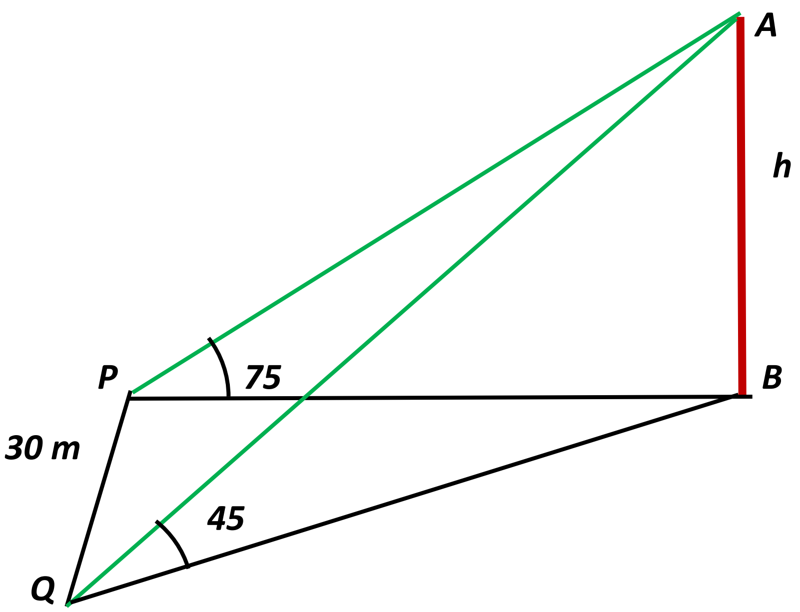
$$100\left(1 - \boldsymbol{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\right) = 100\left(1 - \boldsymbol{\frac{\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}{\left(\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}}\right) =$$

$$100\left(1-\frac{\sqrt{3}\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}}{3(2+\sqrt{2})}\right)=100\left(1-\frac{\sqrt{3}\sqrt{4-2}}{3(2+\sqrt{2})}\right)$$
$$=100\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3(2+\sqrt{2})}\right)$$

Ejemplo 2

Para medir un edificio de base inaccesible nos colocamos en un punto P y observamos su punto más alto bajo un ángulo de 75 grados. Caminando 30 metros en dirección perpendicular a la línea que forma el punto P y la base del edificio llegamos al punto Q, observando ahora el punto más alto bajo un ángulo 45 grados. Calcular la altura del edificio.

Como siempre, hacemos un dibujo. La torre la dibujamos en rojo y las visuales dadas en verde.



Podemos ver en la figura tres triángulos rectángulos, ***PBA, QBA y QPB.*** El problema es que en el único triángulo donde conocemos un cateto, el triángulo ***QPB,*** no conocemos ningún ángulo. En los otros dos nos pasa lo contrario, conocemos los tres ángulos, pero no conocemos ningún cateto. Mientras no se nos ocurra nada, vamos a coger los dos triángulos rectángulos cuyos ángulos conocemos y aplicar la ley de las tangentes porque las hipotenusas, verdes, en principio no nos las han preguntado y serían más incógnitas. Aplicando la ley de las tangentes aparecerá la altura ***h*** y los catetos del triángulo rectángulo de la base. Sino funciona, pensaremos en más opciones.

Triángulo ***PBA***

$$\boldsymbol{tg75 = \frac{h}{\overline{PB}}} \quad \mathbf{(1)}$$

Triángulo ***QBA***

$$\boldsymbol{tg45 = \frac{h}{\overline{QB}}} \quad \mathbf{(2)}$$

Triángulo ***QPB***

Si nos damos cuenta, aplicando Pitágoras a este triángulo conseguimos una ecuación con los catetos ***PB y QB*** como incógnitas, consiguiendo una tercera ecuación con las mismas incógnitas que aparecen en las dos ecuaciones anteriores. Tenemos, por lo tanto, tres ecuaciones con tres incógnitas que nos permiten resolver el problema

$$\boldsymbol{\overline{QB}^2 = \overline{PB}^2 + 30^2} \quad \mathbf{(3)}$$

Por comodidad, vamos a llamar ***"y"*** al segmento ***QB y*** "***x"*** al segmento ***PB.*** También, antes de poner las tres ecuaciones para resolver, calculamos la tangente de ***75*** sin calculadora, para practicar las fórmulas.

$$\boldsymbol{tg75} = tg(45+30) = \frac{tg45 + tg30}{1 - tg30 \cdot tg45} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} =$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{3+1+2\sqrt{3}}{3-1} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{2+\sqrt{3}}$$

Las tres ecuaciones quedan, entonces:

$$\begin{cases} 2+\sqrt{3}=\dfrac{h}{x} \quad (1) \\ 1=\dfrac{h}{y} \quad (2) \\ y^2=x^2+900 \quad (3) \end{cases}$$

Despejando ***"x"*** de la primera, ***"y"*** de la segunda y sustituyendo en la tercera, obtenemos una ecuación en ***"h"***

$$(1) \rightarrow \quad x=\frac{h}{2+\sqrt{3}} \qquad (2) \rightarrow y=h$$

Sustituyendo en (3)

$$h^2=\frac{h^2}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}+900 \rightarrow h^2-\frac{h^2}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=900 \rightarrow$$

$$h^2\left(1-\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}\right)=900 \rightarrow h^2\left(\frac{6+4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}\right)=900 \rightarrow$$

$$\boldsymbol{h}=\frac{300}{\sqrt{\dfrac{6+4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}}}=\mathbf{300}\sqrt{\frac{\mathbf{7+4\sqrt{3}}}{\mathbf{6+4\sqrt{3}}}}$$