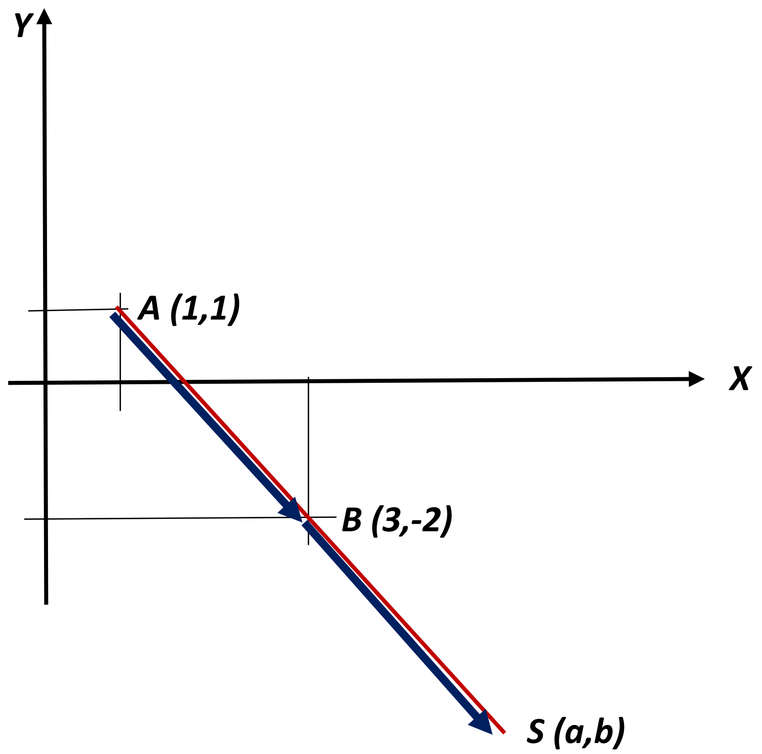
PROBLEMAS SOBRE RECTAS. PUNTOS SIMÉTRICOS

Ejemplo 1

Calcular el punto simétrico del punto A (1,1) respecto del punto B (3,-2)

Como siempre, un dibujo nos ayudará a la resolución del problema. La solución es el punto ***S.***



Para calcular las coordenadas del punto ***S*** hemos de darnos cuenta de que los vectores

$$\overrightarrow{AB} \quad y \quad \overrightarrow{BS}$$

Son equipolentes o, lo que es lo mismo, tienen las mismas coordenadas. Entonces:

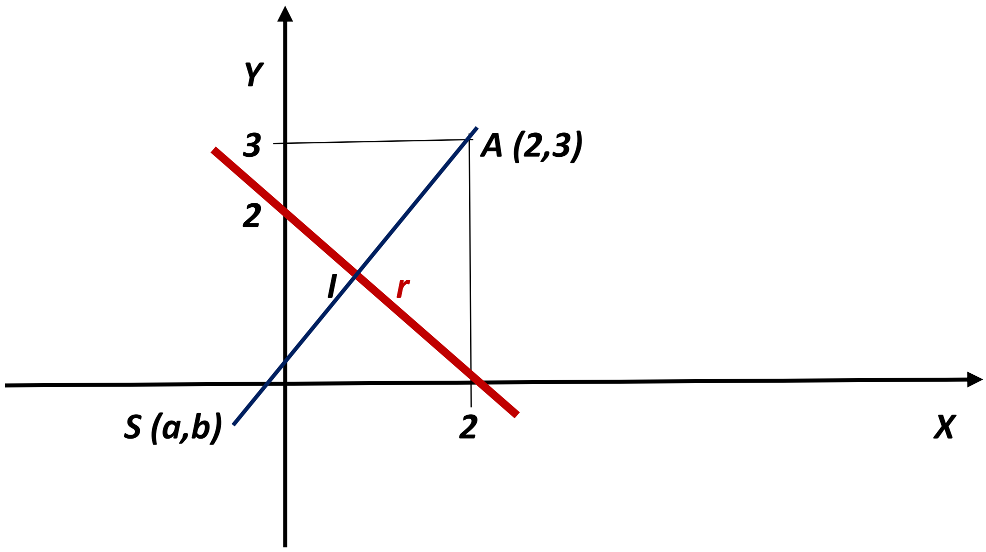
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3-1, -2-1) = (2,-3) \\ \overrightarrow{BS} = (a-3, b-(-2)) = (a-3, b+2) \end{cases} \rightarrow (2,-3) = (a-3, b+2) \rightarrow$$

$$\begin{cases} 2 = a-3 \rightarrow a = 5 \\ -3 = b+2 \rightarrow b = -5 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{S = (5,-5)}$$

Ejemplo 2

Calcular el punto simétrico del punto A (2,3) respecto de la recta r, de ecuación x+y-2=0

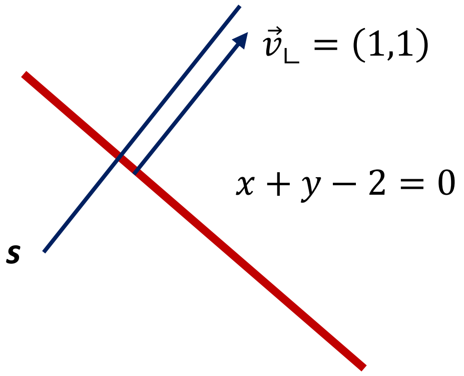
Dibujamos la recta y el punto.



Como se intenta dar a entender en la figura, el punto solución, ***S,*** está sobre la perpendicular trazada por ***A*** a la recta ***r,*** y a la misma distancia de la recta que el punto ***A,*** pero por "el otro lado".

Vamos entonces a calcular primero la recta ***s,*** perpendicular a la recta ***r*** y que pasa por el punto ***A.*** Después calcularemos la intersección de ambas rectas y tendremos el punto ***I.*** Por último, teniendo el punto ***I, punto medio del segmento AS, y el extremo A, podremos calcular el otro extremo, S, solución del problema.***

Primero: ecuación de la recta s



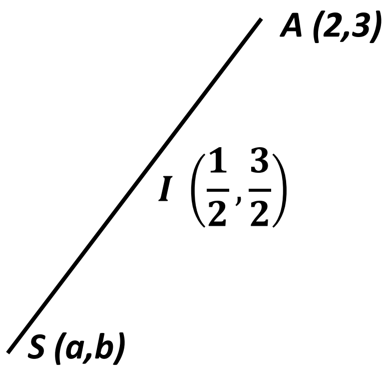
Como debemos de ver en la figura, **el vector *(1,1)*, perpendicular a la recta r, es el vector director de la recta s.** Por lo tanto, ya conocemos su vector y un punto por el que pasa, el punto ***A***. Su ecuación será:

$$\begin{cases} \vec{v} = (1{,}1) \\ A = (2.3) \end{cases} \rightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} \rightarrow \boldsymbol{s \equiv x - y + 1 = 0}$$

Segundo: intersección de las rectas r y s para conocer el punto I

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{2} \rightarrow \boldsymbol{I = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)}$$

Tercero: conocido un extremo, A, y el punto medio, I, calculamos el otro extremo, el punto S solución.



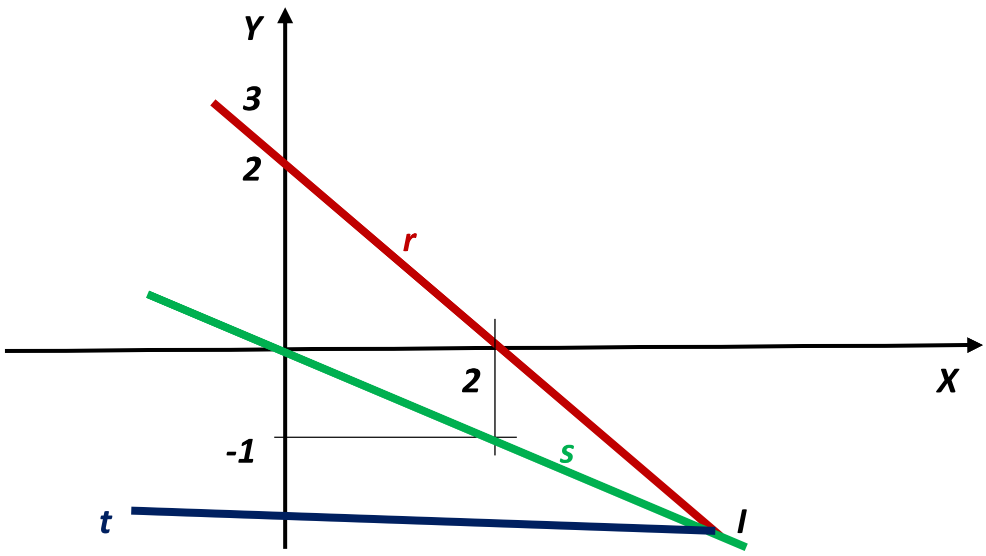
$$\frac{2+a}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \boldsymbol{a = -1}$$

$$\frac{3+b}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow \boldsymbol{b = 0}$$

Ejemplo 3

Calcular la ecuación de la recta simétrica a la recta r: x+y-2=0 respecto de la recta s: y=-(1/2) x

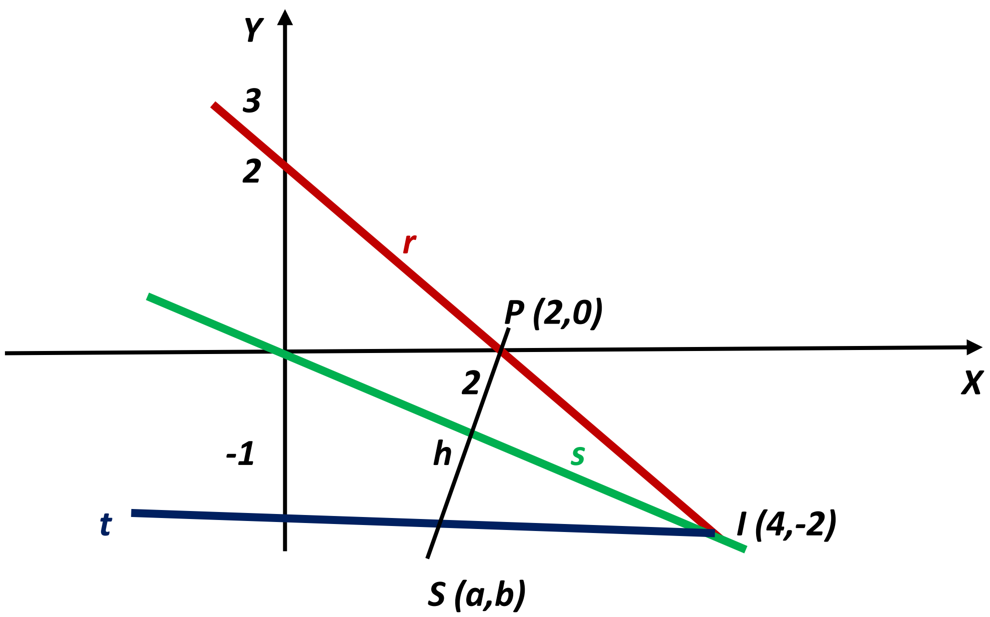
Como siempre, dibujamos los elementos que aparecen en el enunciado y tratamos de sacar conclusiones a partir de ello. Recordamos que para dibujar una recta basta con calcular dos de sus puntos dando valores a ***"x" o a "y".***



Gráficamente debemos de ver que la recta solución es la recta dibujada en ***azul, recta t***, ***y está formada por los puntos simétricos de la recta r, en rojo, respecto de la recta s, en verde.*** Para calcularla bastará entonces con conocer dos de sus puntos. Uno de ellos, como se ve en la figura es el punto ***I, intersección de r y s:***

$$I: \begin{cases} r \equiv x + y - 2 = 0 \rightarrow x - \frac{1}{2}x - 2 = 0 \rightarrow x = 4 \\ s \equiv y = -\frac{1}{2}x \rightarrow y = -2 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{I = (4, -2)}$$

Para calcular el segundo punto nos basta, como hemos dicho, calcular el punto simétrico de cualquier punto de la recta ***r*** respecto de la recta ***s.*** Elegimos el punto ***(2,0)*** de la recta ***r*** y actuamos como en el ejemplo anterior para calcular el punto ***S.***



Por ***P*** trazamos la perpendicular a la recta ***s, recta h:***

$$s \equiv y = -\frac{1}{2}x \rightarrow 2y = -x \rightarrow x + 2y = 0 \rightarrow \vec{v}_{\perp} = (1,2) \rightarrow$$

$$h: \begin{cases} \vec{v}_{\parallel} = (1,2) \\ P = (2,0) \end{cases} \rightarrow h \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-0}{2} \rightarrow \mathbf{2x - y - 4 = 0}$$

Teniendo ya la recta ***h,*** calculamos su intersección con la recta ***s, el punto M,*** que será el punto medio del segmento formado por los puntos ***P y S. Conocidos el extremo, P, y el punto medio M, ya podemos conocer el punto S, segundo punto de la recta solución t.***

$$\begin{cases} s \equiv x + 2y = 0 \\ h \equiv 2x - y - 4 = 0 \end{cases} \rightarrow y = -\frac{4}{5} \quad x = \frac{8}{5} \rightarrow \boldsymbol{M} = \left(\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{5}}, -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\right)$$

Calculamos entonces el punto ***S:***

$$\begin{cases} \dfrac{2+a}{2} = \dfrac{8}{5} \rightarrow a = \dfrac{6}{5} \\ \dfrac{0+b}{2} = -\dfrac{4}{5} \rightarrow b = -\dfrac{8}{5} \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{S} = \left(\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}, -\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{5}}\right)$$

La recta solución es la que pasa por los puntos ***I y S:***

$$I = (4,-2)\; S = \left(\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \vec{v}_{\parallel} = \overrightarrow{IS} = (S - I) = \left(-\dfrac{14}{5}, \dfrac{2}{5}\right) \parallel (-14,2) \parallel (-7,1) \\ I = (4,-2) \end{cases}$$

Donde advertimos que el vector director, formado por los dos puntos, lo hemos multiplicado por ***5*** primero, y dividido después entre ***2. El vector resultante tiene la misma dirección que el primero*** y es más cómodo para el cálculo. Como punto, hemos elegido uno de los dos, el punto ***I*** por ser más simple ya que no está formado por fracciones. Remarcar que a un punto no podemos multiplicarlo por un número, nos sale otro punto evidentemente distinto.

Por último, la recta solución es:

$$\begin{cases} \vec{v} = (-7,1) \\ I = (4,2) \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{\frac{x-4}{-7} = \frac{y-2}{1}}$$