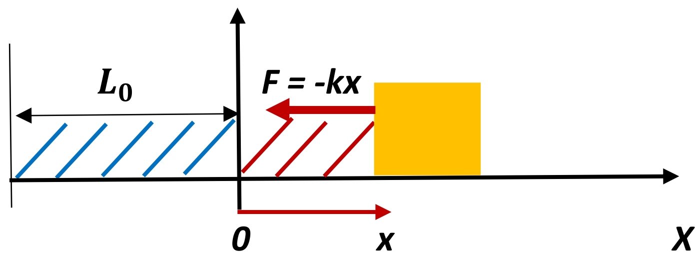
PROBLEMAS MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE. ENERGÍA

Así como en el primer capítulo de problemas dedicados a M.A.S nos hemos dedicado a asimilar el movimiento y sus características, en este segundo capítulo vamos a relacionarlo con la ley de Newton y el teorema del trabajo. Por lo tanto, **consultar este capítulo mejor cuando ya se hayan visto esas dos leyes.**

Para empezar, debemos de saber que la fuerza que ejerce un muelle cuando está estirado o comprimido una cantidad ***"x"*** es:

$$\boldsymbol{F = -kx}$$



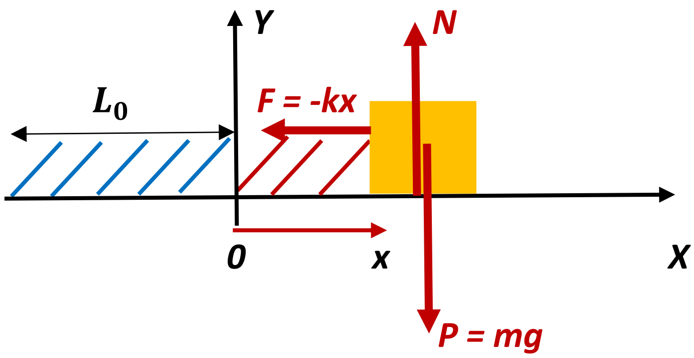
Donde L_0 es la longitud natural del muelle y "x" la longitud estirada (en rojo)**, en este caso. El signo menos proviene de que si "x" es hacia la derecha, positiva, como en el ejemplo, la fuerza es hacia la izquierda, negativa. Lo mismo ocurre si comprimimos el muelle: si "x" es hacia la izquierda, negativa, la fuerza es hacia la derecha, positiva**.

La constante ***"k"*** que aparece es propia del muelle y lo define. Si la despejamos de la expresión:

$$k = \frac{F}{x}$$

Podemos ver que se trata de la fuerza que hay que hacer para estirarlo, o comprimirlo, la unidad de longitud. Entonces, a mayor valor de la constante tenemos un muelle "más rígido".

Vamos a suponer que en nuestro problema de la masa apoyada no hay rozamiento. Si aplicamos las leyes de Newton al cuerpo, de masa ***m:***



Estamos ante una traslación sobre el eje ***"X"***, por lo tanto:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow P = N \rightarrow \boldsymbol{N = mg}$$

$$\sum F_x = ma \rightarrow -kx = ma \rightarrow \boldsymbol{a = -\frac{k}{m}x}$$

Llegados a esta ecuación sobre la aceleración, hemos de recordar que la característica fundamental del movimiento armónico simple es que su aceleración es proporcional a la posición, pero de sentido contario:

Que es la misma conclusión a la que hemos llegado en nuestro problema:

$$\begin{cases} M.A.S.: \boldsymbol{a = -\omega^2 x} \\ Nuestro\ problema: \boldsymbol{a = -\frac{k}{m}x} \end{cases} \rightarrow \frac{k}{m} = \omega^2 \rightarrow \boldsymbol{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Por lo tanto, el movimiento de nuestra masa enganchada al muelle va a ser armónico simple de frecuencia angular conocida según la última fórmula en negrita. **La amplitud del movimiento será la distancia que hayamos estirado el muelle al principio y de donde parta respecto al origen, con velocidad cero.**

A partir de aquí, podemos llegar a conclusiones sobre velocidades y energías.

La velocidad vendrá dada, según la fórmula del M.A.S. por

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

Recordando que la energía potencial de un muelle, fuerza conservativa, viene dada por:

$$\boldsymbol{E_{p.elást.} = \frac{1}{2}kx^2}$$

La energía total, cinética más potencial elástica (no hay variación de altura y la energía potencial gravitatoria la podemos considerar nula tomando altura cero en el eje X) será:

$$\boldsymbol{E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\left(\pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}\right)^2 =$$

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) = \left|\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\frac{k}{m}(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow$$

$$\boldsymbol{E = \frac{1}{2}kA^2}$$

Observamos que se mantiene constante. Pero también podíamos haber llegado a la misma conclusión si aplicamos el teorema de la energía:

$$W_{N.C.} = \Delta E_m$$

En nuestro caso, la única fuerza no conservativa sobre la masa es la normal, puesto que la gravedad y la fuerza elástica son conservativas. **Como el trabajo de la normal es cero, por ser perpendicular al desplazamiento, resulta que el trabajo de las fuerzas no conservativas es cero y se conserva la energía**.

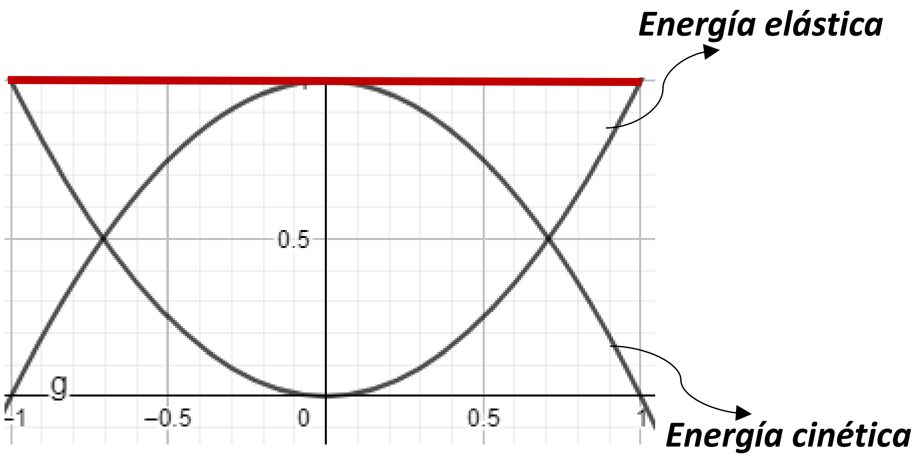
Basta entonces elegir una posición sencilla, por ejemplo, cuando está en uno de los extremos de la carrera, donde la velocidad es cero, para calcularla, pues como sabemos, se mantiene constante. En esos puntos la deformación del muelle es la amplitud, A, y, por lo tanto, ya que la energía cinética es nula, la energía total será la potencial del muelle en esa posición:

$$\boldsymbol{E = \frac{1}{2}kA^2}$$

Cuyo valor coincide, como no podía ser de otra manera, con el valor deducido anterior. Por último, y antes de hacer otro ejemplo ya con datos numéricos, vamos a estudiar las energías en función de la posición:

$$\begin{cases} E_{P.elást} = \frac{1}{2}kx^2 \\ E_c = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2 \end{cases}$$

Donde se observa que la suma de las dos es la constante deducida. Por visualizar y familiarizarnos con el problema, las gráficas de las energías son:



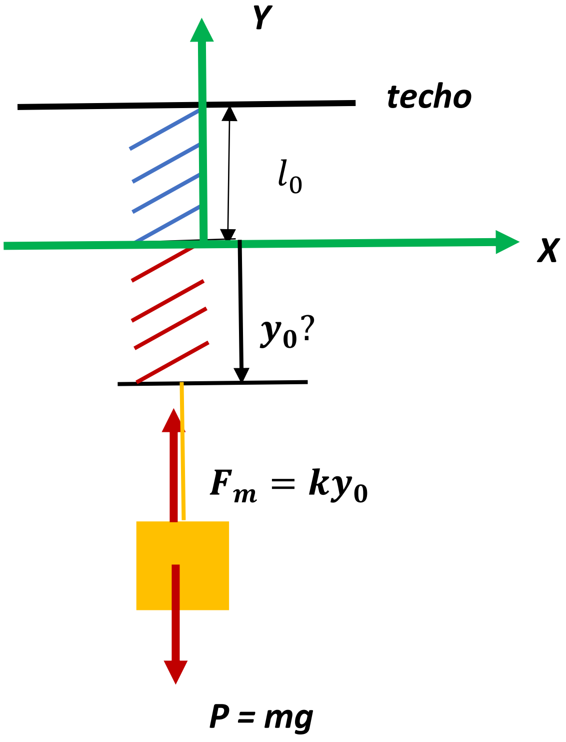
Se ha representado dando al valor de la energía total y de la amplitud **la unidad.** La suma de las dos energías es siempre, para cualquier valor de ***"x"***, la unidad y está marcada por la línea horizontal remarcada en rojo.

Ejercicio 1

Se cuelga una masa de 10 kg de un muelle de constante k = 100 N/m y, apoyando la masa en la mano, la bajamos suavemente hasta la posición de equilibrio, en donde soltamos la mano y la masa queda colgada del muelle quieta. Calcular en esta situación el alargamiento del muelle.

Una vez en la posición de equilibrio, estiramos 5 cm hacia abajo, soltamos y la masa empieza a vibrar. Calcular en esta situación la frecuencia angular y el periodo de las oscilaciones. Deducir la ecuación del movimiento si tomamos el origen de tiempos cuando soltamos la masa una vez que la hemos trasladado los 5 cm hacia abajo

Cuando la masa queda en equilibrio, creemos fácil ver que el peso, vertical y hacia abajo, ha quedado contrarrestado por la fuerza que el muelle ejerce hacia arriba. Como el movimiento es vertical elegimos ***"y"*** como la variable que define la posición del cuerpo.

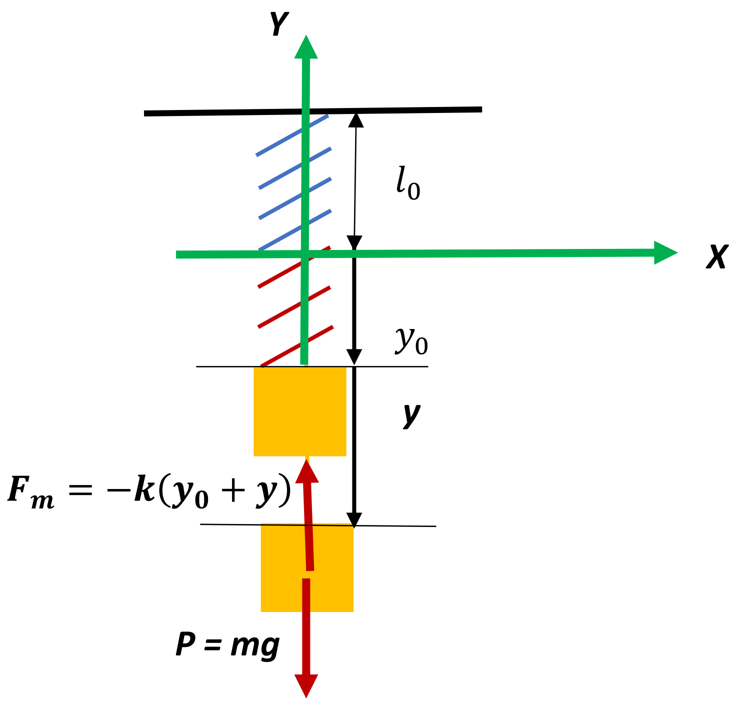


Donde se han dibujado las fuerzas, reflejando su carácter vectorial, y sus módulos. Como se ha dicho, dado que la masa está en equilibrio, la resultante de las fuerzas ha de ser cero. Los módulos de ambas fuerzas deben de ser iguales:

$$\sum \vec{F} = 0 \rightarrow ky_0 = mg \rightarrow \boldsymbol{y_0} = \frac{\boldsymbol{mg}}{\boldsymbol{k}}$$

Que es la repuesta a la primera pregunta. Vayamos con la segunda.

La figura siguiente nos ayudará. En ella, se ha estirado de la masa hacia abajo una distancia ***"y" A PARTIR DE LA POSICIÓN DE EQUILIBRIO alcanzada en la figura anterior:***



Siendo la resultante de ambas fuerzas:

$$\sum F = -k(y_0 + y) - mg = -ky_0 - ky - mg = \left| y_0 = -\frac{mg}{k} \right| =$$

$$= mg - ky - mg = -ky$$

Fijarse que y_0 lleva el signo negativo que le corresponde según los ejes, en verde.

Como depende sólo de la longitud estirada ***y*** desde el punto de equilibrio, elegimos este origen para la variable ***y.*** También podíamos haber pensado que la resultante es igual a lo que AUMENTE la fuerza que ejerce el muelle al estirarlo desde esa posición. Y lo que ha aumentado la fuerza del muelle respecto a la que hacía en el equilibrio sólo depende de la variable ***y marcada en la figura.*** Sabemos ya que la oscilación es alrededor del punto del equilibrio, cuya coordenada respecto a los ejes en la figura es $-y_0$.

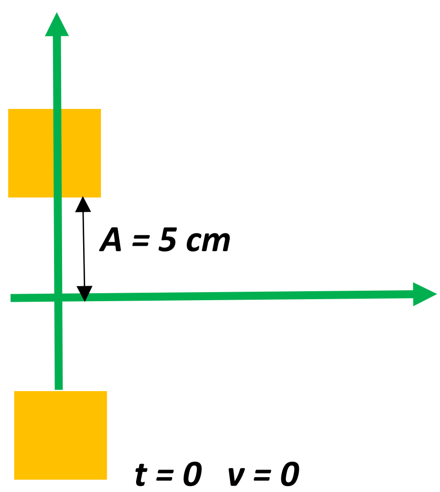
Aplicando la ley de Newton a la resultante de las fuerzas:

$$-ky = ma \rightarrow a = -\frac{k}{m}y \rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \boldsymbol{\omega} = \sqrt{\frac{100}{10}} = \sqrt{\mathbf{10}}\,\boldsymbol{Rd}/_{\boldsymbol{s}}$$

Conociendo la frecuencia angular, calculamos el periodo:

$$\boldsymbol{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\sqrt{\mathbf{10}}}\boldsymbol{s}$$

Para terminar, tenemos que deducir la ecuación del movimiento. Como ya sabemos por cinemática, el origen de coordenadas y de tiempos es fundamental. En el enunciado ya nos han marcado el origen de tiempos, cuando la masa se suelta desde abajo. El origen de coordenadas lo elegimos en el punto de equilibrio



La ecuación del M.A.S., como debemos de recordar, es:

$$y = Acos(\omega t + \varphi_0)$$

Donde ya conocemos la amplitud y la frecuencia angular. El único parámetro que nos queda por determinar es el del ángulo inicial de fase. Este parámetro se "amolda" a la libertad del observador a empezar a estudiar el movimiento cuando quiera. Se calcula siempre teniendo en cuenta lo que se llaman condiciones iniciales, conocidas claro:

$$\begin{cases} A = 0.05\,m \\ \omega = \sqrt{10}\ {Rd}/{s} \end{cases} \rightarrow y = 0.05cos\left(\sqrt{10}t + \varphi_0\right)$$

Y, como decíamos, vamos a hacer que esa ecuación cumpla las condiciones iniciales calculando el ángulo de fase inicial. Según nuestros ejes de coordenadas, la posición inicial, cuando ***t = 0***, es ***0.05 m***. Por lo tanto:

$$y = 0.05cos\left(\sqrt{10}t + \varphi_0\right) \rightarrow -0.05 = 0.05cos\varphi_0 \rightarrow cos\varphi_0 = -1 \rightarrow$$

$$cos\varphi_0 = -1 \rightarrow \boldsymbol{\varphi_0} = \boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}$$

Normalmente salen dos ángulos, puesto que una misma razón trigonométrica puede pertenecer a dos ángulos en la primera vuelta, pero en este caso el único ángulo de la primera vuelta que cumple esa condición es el dado. Si hubieran salido dos, hubiéramos elegido uno de ellos a partir de los datos de la velocidad inicial, positiva o negativa, como se ha visto en el primer archivo dedicado a estos problemas del M.A.S.

La ecuación pedida es entonces:

$$\boldsymbol{y = 0.05cos\left(\sqrt{10}t + \frac{3\pi}{2}\right)}$$