PROBLEMAS GRAVEDAD. SATÉLITES EN ÓRBITA

Problema 1

Sabiendo que la gravedad en la superficie de la tierra es $g_0 = 9'8\ {}^{m}/_{s^2}$, que el radio de la tierra $R_T = 6500\ Km$ y conocido el valor de la constante universal G, calcular:

a) la masa aproximada de la tierra.
b) altura sobre la superficie terrestre a la que la gravedad disminuye en un diez por ciento respecto de la gravedad en la superficie (expresar esa altura en función del radio de la tierra).

a) masa de la tierra

El peso en la superficie de la tierra sabemos que viene dado por:

$$P_s = mg_0$$

Pero, por otra parte, aplicando la ley de gravitación universal y sabiendo que fuera de un planeta sus efectos gravitatorios son los que ejercería toda su masa estando en el centro, tenemos:

$$P_s = G\frac{M_T}{R_T^2} \cdot m$$

Y comparando ambas expresiones:

$$\boldsymbol{g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}} \rightarrow 9{,}8 = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{M_T}{(6{,}5 \cdot 10^6)^2} \rightarrow$$

$$M_T = \frac{9{,}8 \cdot (6{,}5 \cdot 10^6)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} \approx 6{,}2 \cdot 10^{24}\ Kg$$

Recalcamos que la expresión

$$\boldsymbol{g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} = 9,8}$$

Se utilizará en muchos problemas cuando sólo se dé como dato el radio de la tierra o del planeta que sea.

b) altura sobre la superficie terrestre a la que la gravedad disminuye en un diez por ciento respecto de la gravedad en la superficie (expresar esa altura en función del radio de la tierra).

La gravedad (fuerza sobre 1 Kg) a una distancia D del centro de la tierra es:

$$g = \frac{90}{100}g_0 \rightarrow G\frac{M_T}{D^2} = \frac{90}{100}G\frac{M_T}{R_T^2} \rightarrow \frac{9}{10}\frac{1}{R_T^2} = \frac{1}{D^2}$$

$$\boldsymbol{D = \frac{\sqrt{10}}{3}R_T}$$

Siendo entonces la altura sobre la superficie terrestre:

$$\boldsymbol{h} = R_T\frac{\sqrt{10}}{3} - R_T = \boldsymbol{R_T\left(\frac{\sqrt{10}}{3} - 1\right)m}$$

Problema 2

Calcular la velocidad orbital y la altura sobre la superficie de la tierra de un satélite geoestacionario. Calcular asimismo la energía necesaria para ponerlo en órbita.

Datos: $\boldsymbol{masa\ satélite = 5\ Tm, g_0 = 9,8\ {}^{m}/_{s^2}, R_T = 6500\ Km}$

Velocidad orbital y altura sobre la superficie:

Tenemos que saber que un satélite geoestacionario tiene de ***periodo 24 horas*** y por eso parece estacionario respecto a la superficie.

Aplicando la misma ley (fuerza de atracción igual a la masa del satélite por su aceleración centrípeta) llegamos a la relación entre la velocidad orbital y la distancia D radio de la órbita, fórmula (1) fundamental que se ha demostrado en la teoría y que aparece en la hoja de “fórmulas”. En este caso, ya que conocemos el periodo, hacemos aparecer el periodo en la ley fundamental

$$(1)\ \boldsymbol{GM_T = v^2 D} \rightarrow \left| v = \omega D = \frac{2\pi}{T} D \right| \rightarrow$$

$$GM_T = \left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right) D \rightarrow GM_T \cdot T^2 = 4\pi^2 D^3 \rightarrow$$

$$\boldsymbol{D} = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} = |ndor\ y\ ddor \times R_T^2\ | = \sqrt[3]{\frac{\boldsymbol{GM_T} T^2 R_T^2}{4\pi^2 \boldsymbol{R_T^2}}}$$

$$= \left| g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2} = 9.8 \right| = \sqrt[3]{\frac{g_0 T^2 R_T^2}{4\pi^2}} \approx \boldsymbol{42780\ Km}$$

Donde, dado que no nos daban la masa de la tierra, hemos utilizado la igualdad

$$g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2} = 9.8$$

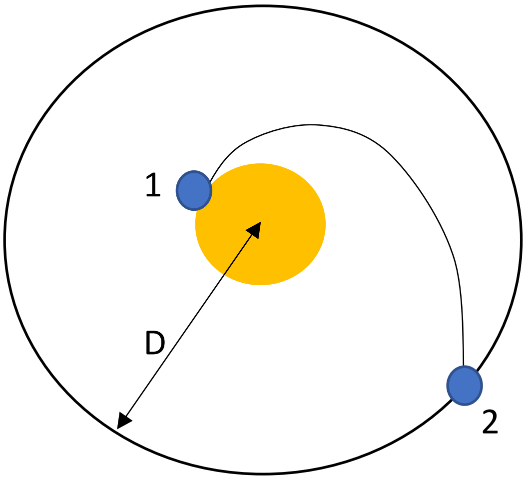
Como en el primer problema. Para que apareciera en los cálculos hemos multiplicado numerador y denominador por R_T^2, conocido, como se ha advertido.

Ya estamos en condiciones de calcular la velocidad orbital:

$$\boldsymbol{GM_T = v^2 D} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{D}} = \sqrt{\frac{GM_T R_T^2}{D R_T^2}} = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{D}} \approx 3110\ {}^{m}/_{s}$$

Energía necesaria para ponerlo en órbita

Para calcular la energía necesaria para ponerlo en órbita vamos a aplicar el teorema del trabajo al satélite entre su estado inicial en la superficie de la tierra cuando está parado y el estado final en la órbita con su velocidad orbital. Hemos de tener en cuenta que lo que queremos calcular es el trabajo de las fuerzas no conservativas, el trabajo de los "cohetes", para que el satélite alcance su órbita.



$$W_{NC}{}_1^2 = \Delta E_m$$

$$\begin{cases} W_{NC}{}_1^2 = ? \\ \Delta E_m = \begin{cases} E_m(2) = -\frac{1}{2} G \frac{M_T}{D} m \\ E_m(1) = -G \frac{M_T}{R_T} m \end{cases} \end{cases}$$

$$W_{NC}{}_1^2 = E_m(2) - E_m(1) = -\frac{1}{2} G \frac{M_T}{D} m + G \frac{M_T}{R_T} m = G M_T m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2D} \right)$$

Donde para calcular la energía mecánica en la órbita, $E_m(2)$, hemos utilizado la fórmula de la energía mecánica de un satélite en órbita demostrada en la teoría.

Y, como antes, hacemos que aparezca g_0

$$W_{NC_1}^{\ 2}=\frac{GM_T}{R_T^2}R_T^2m\left(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{2D}\right)=\boldsymbol{g_0R_T^2m\left(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{2D}\right)}$$

Donde ya podemos calcular el trabajo exterior no conservativo, la energía pedida, en función de datos conocidos. Numéricamente:

$$W_{NC_1}^{\ 2}=9.8\cdot(6.5\cdot10^6)^2\cdot5000(\frac{1}{6.5\cdot10^6}-\frac{1}{2\cdot4.28\cdot10^7})$$

$$\boldsymbol{W_{NC_1}^{\ 2}=2.943\cdot10^{11}\,J}$$

Problema 3

Comparar los periodos de dos satélites sabiendo que el más alejado de la estrella central dista tres veces más que el más cercano.

$$\boldsymbol{GM_{sol}=v^2D}\rightarrow$$

$$GM_{sol}=(\frac{2\pi}{T}D)^2D\rightarrow\boldsymbol{\frac{T^2}{D^3}}=\frac{4\pi^2}{GM_{sol}}=\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{\frac{T_1^2}{D_1^3}=\frac{T_2^2}{D_2^3}}\rightarrow\frac{T_1^2}{D_1^3}=\frac{T_2^2}{(3D_1)^3}\rightarrow\frac{T_1^2}{1}=\frac{T_2^2}{27}$$

$$\boldsymbol{T_1=\sqrt{\frac{1}{27}}\cdot T_2}$$

Problema 4

Conociendo el radio orbital y el periodo de la tierra alrededor del sol y el radio orbital de saturno, relacionar el periodo de saturno con el de la tierra. Datos: R_T, T_T, R_S

Para relacionar los radios de las órbitas de varios satélites alrededor del mismo astro, como en nuestro caso, utilizamos la misma ley que en el problema anterior que es una de las leyes de Kepler.

En nuestro caso:

$$\frac{T_T^2}{T_S^2} = \frac{R_T^3}{R_S^3} \rightarrow T_S^2 = \frac{R_S^3}{R_T^3} T_T^2 \rightarrow \boldsymbol{T_s = T_T \sqrt{\frac{R_S^3}{R_T^3}}}$$

Donde el periodo de la tierra es conocido claramente, un año. Por lo tanto

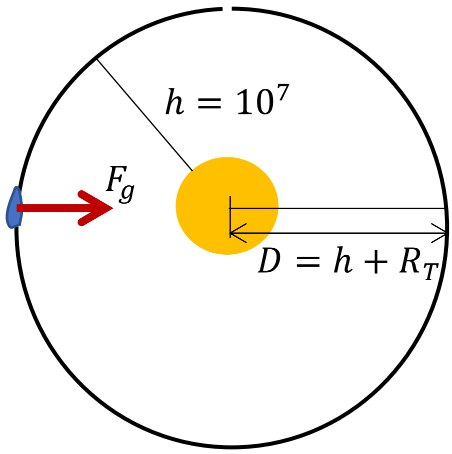
$$\boldsymbol{T_s = 1 \sqrt{\frac{R_S^3}{R_T^3}}\ años}$$

Recordamos, como ya lo hemos hecho en otras ocasiones, que en esta fórmula "multiplicativa" o de "relación" podemos utilizar las unidades que queramos con tal de que sean las mismas en ambos lados. Como el periodo de la tierra lo hemos puesto en años terrestres, el periodo de saturno sale también en años terrestres.

Problema 5

Un satélite gira alrededor de la tierra a una altura sobre su superficie $\boldsymbol{h = 10^7 m}$. Calcular su velocidad orbital, angular y periodo.

Datos: $\boldsymbol{g_0 = 9,8\ {}^{m}/_{s^2}}$. Radio de la tierra: 6500 Km



Vemos claramente que se trata de un movimiento circular con centro en el centro de la tierra. La fuerza de la gravedad sobre el satélite, F_g, es la fuerza que va hacia el centro de giro y, por lo tanto, es la fuerza centrípeta causante del movimiento. Entonces:

$$\boldsymbol{F_g = m_s \cdot a_c} \rightarrow G\frac{M_T \cdot m_s}{D^2} = m_s\frac{v^2}{D} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boldsymbol{GM_T = v^2 D} \rightarrow$$

$$GM_T = v^2(10^7 + 6{,}5 \cdot 10^6) \rightarrow v = \sqrt[2]{\frac{GM_T}{1{,}65 \cdot 10^7}} = \sqrt[2]{\frac{GM_T R_T^2}{1{,}65 \cdot 10^7 R_T^2}} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{v = \sqrt[2]{\frac{g_0 R_T^2}{1{,}65 \cdot 10^7}} \approx 5000\, {}^{m}/_{s}}$$

Velocidad angular

$$v = \omega D \rightarrow \omega = \frac{v}{D} \approx \frac{5000}{1{,}65 \cdot 10^7} \approx 3 \cdot 10^{-4}\ {}^{Rd}/_{s}$$

Periodo

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 20734{,}5\ s = 5{,}76\ horas$$