OPTIMIZACIÓN

Como ya sabemos por la definición de **derivada ésta nos sirve**, entre otras cosas, **para calcular en qué puntos una función alcanza un valor máximo o mínimo puesto que en estos puntos la derivada se anula**. En la vida "real" esto puede ser importante. En los siguientes problemas se trata de encontrar la solución óptima, máximo o mínimo, de cierta función. **La complicación, que creemos que normalmente no es mucha, es que tenemos que deducir por nuestra cuenta cuál es esa función**. No se puede dar una fórmula general para ello, pero sí se puede hablar de unas pautas para llegar a ella. Creemos que con los ejemplos puede quedar clara la forma de trabajar. Veamos:

Ejemplo 1.

Descomponer el número 10 en dos sumandos de tal manera que su producto sea máximo.

PRIMER PASO:

Expresar la función a optimizar, sin tener en cuenta el enunciado, que en este caso es el producto de dos números. Por lo tanto:

$$\boldsymbol{P(x,y) = x \cdot y}$$

Esta función, como en nuestro caso, será función de dos variables (si el problema es muy simple y la función es de una variable mejor, sólo tendremos que derivarla para encontrar su máximo o mínimo)

SEGUNDO PASO:

Relacionar las dos variables teniendo en cuenta el enunciado. Es en este segundo paso en donde está la complicación de estos problemas. En el nuestro, por ser el primero, creemos que es bastante sencilla puesto que en el enunciado nos dicen "descomponer el número 10".

Por lo tanto

$$\boldsymbol{x+y=10 \rightarrow y=10-x}$$

TERCER PASO:

Despejando una de ellas en esta relación y sustituyendo en la función a optimizar llegamos al tercer y último paso:

$$\boldsymbol{P(x)=x\cdot(10-x)}$$

Función de una variable cuyo máximo (o mínimo) cumple que la derivada es cero. Por lo tanto:

$$\boldsymbol{P'(x)}=1(10-x)+x(-1)=\boldsymbol{10-2x}=0\rightarrow 10-2x=0\rightarrow \boldsymbol{x=5}$$

Siendo entonces el otro sumando $y=10-x\rightarrow \boldsymbol{y=5}$

Cuyo producto, que es la función que queríamos optimizar, es ***25***

Nos puede quedar una duda: ¿es máximo o mínimo? En la teoría de dibujo de funciones, en el apartado de concavidad y convexidad, se dice que los **máximos tienen la segunda derivada negativa y los mínimos la tienen positiva.**

En nuestro problema:

$$\boldsymbol{P''(x)=-2}\ \forall x$$

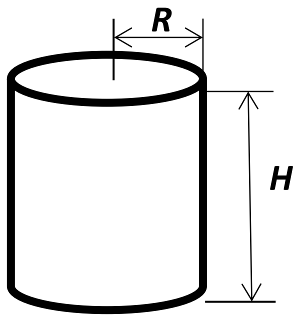
que como es negativa para todo valor de ***x*** concluimos que el valor hallado de ***x*** nos da un máximo de la función estudiada. Al estar el problema bien enunciado, los valores que nos salen suelen ser la solución que nos piden, pero hay que comprobar con la segunda derivada que lo que nos sale es efectivamente la solución, con más razón si nos salieran varias soluciones.

Ejemplo 2.

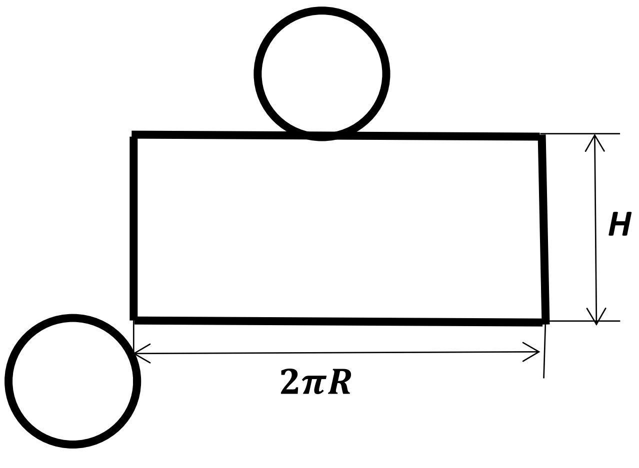
Queremos construir un bote cilíndrico con tapas de volumen $1\ u^3$ (1 unidad cúbica). Queremos que la superficie de chapa utilizada sea mínima para gastar en ella el mínimo dinero posible. ¿Qué dimensiones ha de tener el bote?

Primer paso. Función a optimizar.

Cogemos un bote cualquiera (en este caso es lo que queremos decir cuando hablamos de no tener en cuenta los datos del problema: cogemos un bote **cualquiera**) y expresamos la función a optimizar que es su área:



Si desplegamos el cilindro para calcular su área tenemos:



$$A = 2 \cdot (\pi R^2) + 2\pi RH$$

Función de dos variables en ***R y H***, donde el primer sumando representa el área de las dos tapas y el segundo es la superficie lateral.

Segundo paso. Relacionar las dos variables *R y H*:

Como se ha dicho, es en este paso donde tenemos en cuenta el enunciado, **en él está la relación buscada**, y en este caso es fácil intuir que **el volumen, de una unidad cúbica del que habla el enunciado, nos dará pistas**. En efecto, sabemos que el **volumen de cualquier prisma recto es área de la base por la altura.** En nuestro problema

$$V = \boldsymbol{\pi R^2 H = 1} \to \boldsymbol{H} = \boldsymbol{\frac{1}{\pi R^2}}$$

Donde encontramos la relación buscada.

Tercer paso: Sustituir la relación anterior en la función a optimizar.

Sustituyendo la relación anterior en la función a optimizar nos queda:

$$A = 2 \cdot (\pi R^2) + 2\pi RH \to A = 2\pi R^2 + 2\pi R \frac{1}{\pi R^2} \to \boldsymbol{A = 2\pi R^2 + \frac{2}{R}}$$

Ya estamos en condiciones de calcular el mínimo de esta función**.** Derivamos para ello:

$$A' = 2\pi 2R + \frac{-2}{R^2}$$

Igualando a cero para calcular su mínimo (o máximo).

$$4\pi R - \frac{2}{R^2} = 0 \to R^3 = \frac{1}{2\pi} \to \boldsymbol{R} = \sqrt[3]{\boldsymbol{\frac{1}{2\pi}}}$$

Siendo entonces la altura del cilindro:

$$\boldsymbol{H = \frac{1}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right)^2}}$$

Comprobamos que la segunda derivada queda positiva para el valor del radio calculado, por lo que será un mínimo.

$$A' = 2\pi 2R + \frac{-2}{R^2} \rightarrow A'' = 4\pi + \frac{-(-2)2R}{R^4} = 4\pi + \frac{4}{R^3} \rightarrow A''\left(\sqrt[3]{\boldsymbol{\frac{1}{2\pi}}}\right)$$

$$= 4\pi + \frac{4}{\frac{1}{2\pi}} = 12\pi > 0$$

Por lo que los valores calculados corresponden a un mínimo.

Ejemplo 3.

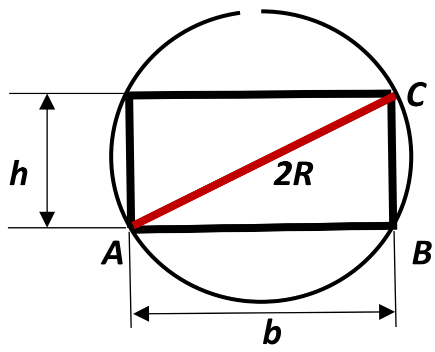
Inscribir un rectángulo de área máxima en una circunferencia de radio R.

Primer paso. Función para optimizar:

Como ya hemos comentado, para expresar la función que tenemos que optimizar dibujamos un esbozo del problema y escribimos la función a optimizar “sin tener en cuenta los datos del problema”, en nuestro caso el área de un rectángulo cualquiera inscrito en una circunferencia:

$$\boldsymbol{A = b \cdot h}$$

Segundo paso: Relacionar las dos variables que aparecen en la función a optimizar:



Para esta relación tenemos que observar la figura y los datos del problema. Cuando se trate de circunferencias, el radio o el diámetro suele dar pistas sobre ello. Además, **en vez de dibujar un radio o diámetro cualquiera, dibujamos los que tengan que ver con nuestra figura, el rectángulo en este caso, que en nuestro dibujo es el diámetro $\overline{AC}$**. Si nos fijamos en el triángulo rectángulo ABC creemos que se ve fácilmente la relación entre ***b y h*** aplicando el teorema de Pitágoras:

$$b^2 + h^2 = (2R)^2$$

Y despejando una de ellas, la variable h, por ejemplo, en función de la otra nos queda:

$$h = \sqrt{4R^2 - b^2}$$

Tercer paso: Por medio de la relación hallada se sustituye en la función a optimizar la variable h y esta nos queda ya función de una variable:

$$A = b \cdot \sqrt{4R^2 - b^2}$$

Cuyo máximo (o mínimo) se calcula igualando a cero su derivada:

$$A = b \cdot \sqrt{4R^2 - b^2} \rightarrow A' = 1\sqrt{4R^2 - b^2} + b\frac{1}{2\sqrt{4R^2 - b^2}}(-2b)$$

Igualando a cero nos queda:

$$1\sqrt{4R^2-b^2}+b\frac{1}{2\sqrt{4R^2-b^2}}(-2b)=0\rightarrow 4R^2-b^2-b^2=0\rightarrow$$

Donde en el último paso hemos multiplicado todos los términos de la ecuación por la raíz.

$$b^2=2R^2\rightarrow b=\pm R\sqrt{2}$$

Elegimos claramente el valor positivo, siendo entonces la altura del rectángulo para esta base:

$$h=\sqrt{4R^2-b^2}=\sqrt{4R^2-2R^2}=R\sqrt{2}$$

Siendo por lo tanto la solución un cuadrado de igual base que altura. Se deja como trabajo el demostrar que es un máximo haciendo la segunda derivada y comprobando que para el valor de ***b*** calculado esta es negativa.

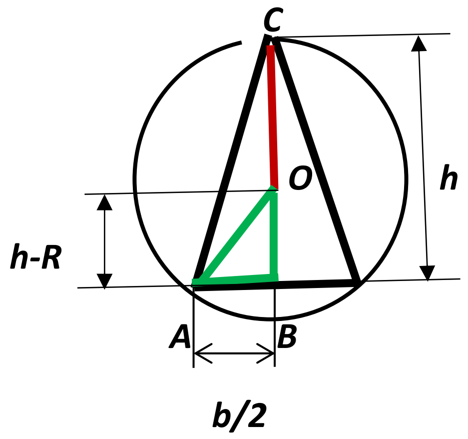
Ejemplo 4.

Calcular las dimensiones del triángulo isósceles inscrito en una circunferencia de radio R que tiene la mayor área.

Primer paso: Función a optimizar: el área de un triángulo que escribimos directamente:

$$A=\frac{1}{2}bh$$

Segundo paso: Relación entre las variables b y h:



victor loza
ACADEMIA ONLINE

Si nos fijamos en el triángulo *AB0*, en verde, cuya hipotenusa es el radio de la circunferencia (como en el ejemplo anterior vemos que el radio de la circunferencia nos da pistas, un radio "especial" que va a un vértice del triángulo problema), un cateto, el *AB*, es la mitad de la base y el otro cateto, el *0B*, es la altura del triángulo menos el radio *0C*, en rojo. Si aplicamos Pitágoras al triángulo ***ABO*** nos queda:

$$\boldsymbol{R^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + (h - R)^2}$$

De donde podemos despejar ***b* en función *de h*** (aunque podíamos despejar h en función de b y llegaríamos al mismo resultado y proceso)

$$b = 2\sqrt{R^2 - (h-R)^2} = 2\sqrt{R^2 - (h^2 + R^2 - 2Rh)} = 2\sqrt{2Rh - h^2}$$

Tercer paso: Sustituimos el valor de b, función de h, en la función a optimizar quedando, como siempre, una función de una variable:

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2} 2\sqrt{2Rh - h^2} \cdot h \rightarrow \boldsymbol{A = h\sqrt{2Rh - h^2}}$$

Derivando queda:

$$A' = 1\sqrt{2Rh - h^2} + h\frac{1}{2\sqrt{2Rh - h^2}}(2R - 2h)$$

Igualando a cero queda:

$$1\sqrt{2Rh - h^2} + h\frac{1}{2\sqrt{2Rh - h^2}}(2R - 2h) = 0$$

Multiplicando a todos los miembros de la ecuación por la raíz:

$$\rightarrow 2Rh - h^2 + h(R - h) = 0$$

$$\rightarrow -2h^2 + 3Rh = 0 \rightarrow h(3R - 2h) = 0 \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{h = 0} \\ \boldsymbol{h = \frac{3}{2}R} \end{cases}$$

Eligiendo el valor que da sentido al problema:

$$\boldsymbol{h = \frac{3}{2}R}$$

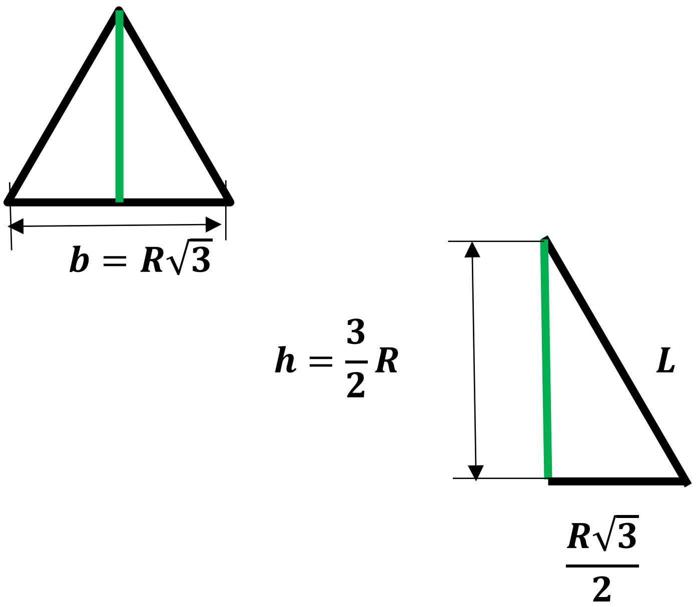
Ya que el valor de ***h=0*** no nos da como solución ningún triángulo.

Demostrar, por parte del sufrido lector, que es un máximo comprobando que la segunda derivada para este valor de ***h*** nos queda negativa.

Si calculamos, con este valor de ***h***, la base del triángulo veremos que se trata de un triángulo equilátero:

$$\boldsymbol{b} = 2\sqrt{2Rh - h^2} = 2\sqrt{2R\frac{3}{2}R - \frac{9}{4}R^2} = 2\sqrt{\frac{3}{4}R^2} = \boldsymbol{R\sqrt{3}}$$

Calculando los lados desiguales en la figura:



$$\boldsymbol{L^2} = \frac{9}{4}R^2 + \frac{R^2 \cdot 3}{4} = \boldsymbol{3R^2} \rightarrow \boldsymbol{L = R\sqrt{3}}$$

Como vemos, la base es igual que los catetos. **Se trata de un triángulo equilátero.**