MOVIMIENTOS DE ACELERACIÓN CONSTANTE DOS DIMENSIONES

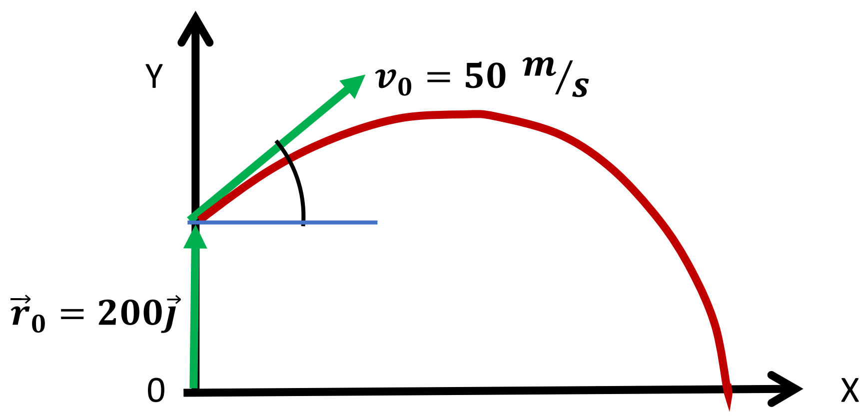
Problema 1

Desde lo alto de un acantilado de 200 m de alto se lanza una piedra con velocidad de 50m/s en módulo y formando 30º con la horizontal. Calcular:

a) altura máxima alcanzada

b) posición a los tres segundos del disparo

c) posición del impacto y velocidad en ese momento. Rapidez y ángulo que forma la velocidad con la vertical en el momento del impacto (se entiende por rapidez el módulo del vector velocidad).



Como ya sabemos, para calcular cualquier dato que nos pidan hemos de deducir el vector $\vec{r}$ del movimiento. Al tratarse de un movimiento de aceleración constante utilizamos la ley ya conocida

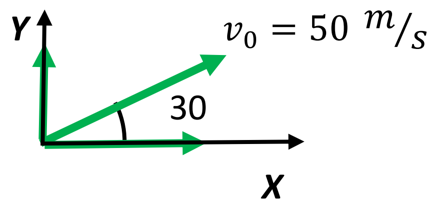
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

y para ello hemos de calcular $\vec{r}_0, \vec{v}_0\ y\ \vec{a}$.

Empezamos a contar tiempos cuando se lanza la bola:

$\vec{r}_0 = 200\vec{j}$ Como vemos en la figura

Para calcular la velocidad inicial tenemos que calcular las componentes horizontal y vertical del vector. Esto lo tenemos que hacer utilicemos la forma vectorial o escalar a cada eje.



$\vec{v}_0?$: $\vec{v}_0 = 50cos30\vec{\imath} + 50sen30\vec{\jmath}$

$$\boldsymbol{\vec{v}_0 = 25\sqrt{3}\vec{\imath} + 25\vec{\jmath}}$$

$$\boldsymbol{\vec{a} = -10\vec{\jmath}}$$

Teniendo ya las tres características que definen el movimiento y aplicando la ley nos queda:

$$\vec{r}(t) = 200\vec{\jmath} + \left(25\sqrt{3}\vec{\imath} + 25\vec{\jmath}\right)t + \frac{1}{2}(-10\vec{\jmath})t^2$$

Y agrupando términos:

$$\boldsymbol{\vec{r}(t) = 25\sqrt{3}t\vec{\imath} + (200 + 25t - 5t^2)\vec{\jmath}}$$

Y, si preferimos, separamos en términos en “x” e “y”.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 25\sqrt{3}t} \\ \boldsymbol{y = 200 + 25t - 5t^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \boldsymbol{v_x = 25\sqrt{3}} \\ \boldsymbol{v_y = 25 - 10t} \end{cases}$$

Ahora estamos en condiciones de contestar lo que queramos:

a) Altura máxima:

Este punto tiene de “especial” que $\boldsymbol{v_y = 0}$ (si $v_y \neq 0$ el móvil estaría subiendo o bajando, algo falso en el caso de que esté arriba del todo)

Por lo tanto:

$$v_y = 25 - 10t = 0 \rightarrow t = 2{,}5s$$

Sabiendo que en ese tiempo está arriba del todo, para calcular la altura no tenemos más que sustituir en la expresión de y:

$$y(2{,}5) = 200 + 25 \cdot 2{,}5 - 5 \cdot 2{,}5^2 = 231{,}25$$

$$\boldsymbol{y_{max} = 231,25}$$

b) Posición a los tres segundos

No tenemos más que sustituir en las expresiones "x" e "y":

$$\begin{cases} \boldsymbol{x(3)} = 25\sqrt{3} \cdot 3 = \boldsymbol{75\sqrt{3}\, m} \\ \boldsymbol{y(3)} = 200 + 25 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = \boldsymbol{230\, m} \end{cases}$$

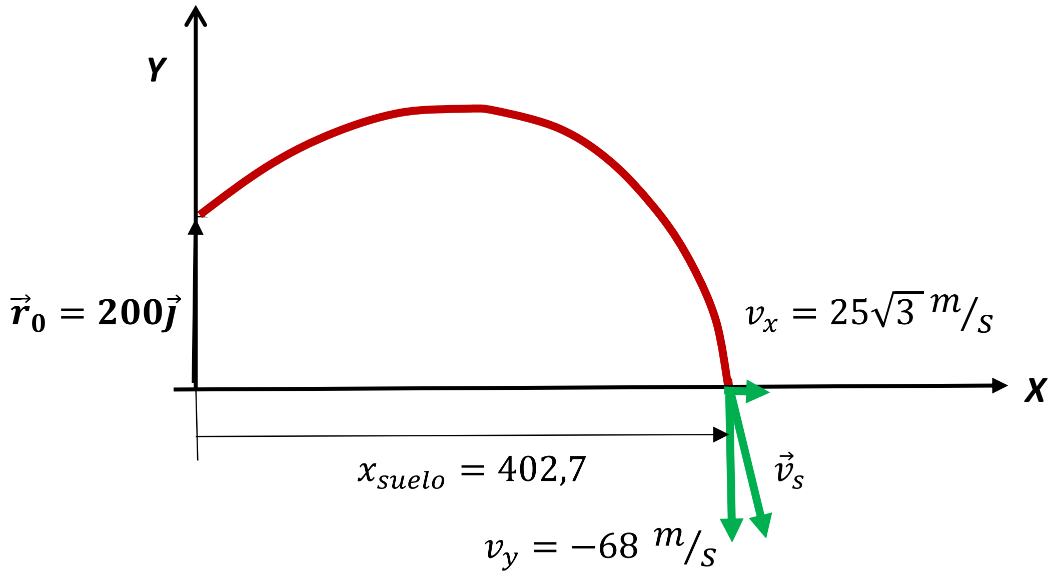
c) Posición y velocidad al llegar al suelo:

El punto del suelo tiene de "especial" que para nuestro sistema cartesiano la "y" vale cero. Entonces:

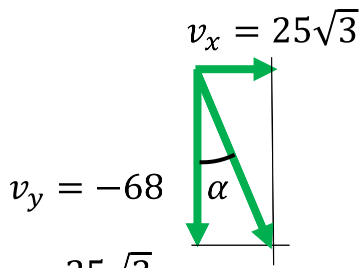
$$y = 200 + 25t - 5t^2 = 0 \rightarrow y = \begin{cases} 9{,}3 \\ -4{,}3 \end{cases}$$

Desechamos el valor negativo. Sabiendo que llega al suelo en ***t=9,3s*** sólo nos queda calcular la posición y la velocidad en ese momento para contestar a lo que nos preguntan:

$$\begin{cases} x = 25\sqrt{3}t \rightarrow \boldsymbol{x(9,3) \cong 402,7} \\ \boldsymbol{y = 0} \end{cases} \quad \begin{cases} \boldsymbol{v_x = 25\sqrt{3}} \\ \boldsymbol{v_y} = 25 - 10t \rightarrow v_y(9{,}3) = \boldsymbol{-68} \end{cases}$$



Nos preguntan también el módulo de la velocidad en el suelo y el ángulo que forma con la vertical. Dado que tenemos las dos componentes, creemos que es muy sencillo, basta con aplicar las leyes de los triángulos rectángulos -



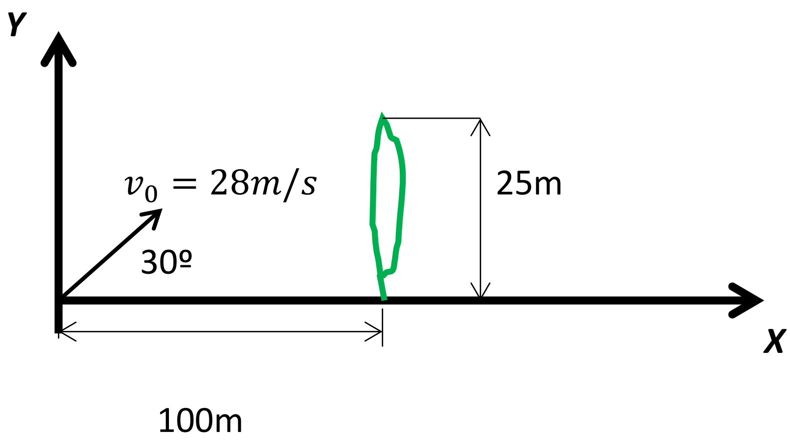
$$tg\alpha = \frac{25\sqrt{3}}{68} \rightarrow \boldsymbol{\alpha} = arctg\frac{25\sqrt{3}}{68} = \mathbf{32.48}\ º$$

$$|\vec{v}| = \boldsymbol{v} = \sqrt{(25\sqrt{3})^2 + (-68)^2} \cong \mathbf{80{,}62}\boldsymbol{m/s}$$

En esta segunda tanda de problemas de aceleración constante elevamos un poco la complicación, pero nos gustaría demostrar que las ideas son exactamente las mismas. No se trata, por lo tanto, de aprender fórmulas, sino ideas y formas.

Problema 2

Se lanza desde el punto P una bola tal como indica la figura. Deducir si pasa por encima del árbol o si, por el contrario, choca con él. Calcular el punto del impacto de la bola, ya sea con el suelo o con el árbol.



Como sabemos, lo primero que hacemos es calcular la posición inicial, la velocidad inicial y la aceleración.

$$\boldsymbol{\vec{r}_0 = \vec{0}}$$

$$\vec{v}_0 = 28cos30\vec{\imath} + 28sen30\vec{\jmath} = 28\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} + 28\frac{1}{2}\vec{\jmath} = \mathbf{14\sqrt{3}\vec{\imath} + 14\vec{\jmath}}$$

$$\boldsymbol{\vec{a} = -10\vec{\jmath}}$$

El vector de posición, sustituyendo en la ecuación fundamental de estos movimientos:

$$\boldsymbol{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2}$$

$$\vec{r}(t) = \left(14\sqrt{3}\vec{\imath} + 14\vec{\jmath}\right)t + \frac{1}{2}(-10\vec{\jmath})t^2$$

Y agrupando términos:

$$\boldsymbol{\vec{r}(t) = 14\sqrt{3}t\vec{\imath} + (14t - 5t^2)\vec{\jmath}}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 14\sqrt{3}t} \\ \boldsymbol{y = 14t - 5t^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{v_x = 14\sqrt{3}} \\ \boldsymbol{v_y = 14 - 10t} \end{cases}$$

Ahora nos preguntamos cómo contestar a la pregunta ¿choca o no con el árbol? Vamos a calcular la altura de la bola cuando ***x=100*** que es la posición en horizontal del árbol. Si esa altura es mayor de 25 la bola pasará por encima. Si no, nos dará el punto de impacto con el árbol, salvo que sea negativa lo que significaría que choca en el suelo antes de llegar al árbol. Veamos

$$x = 14\sqrt{3}t = 100 \to t \cong 4{,}12s \to y(4{,}12) = 14 \cdot 4{,}12 - 5 \cdot 4{,}12^2 = -27{,}13$$

El valor de ***y*** negativo significa, como hemos comentado, que la trayectoria de la bola es una parábola que pasa por el eje X antes que ***x=100*** y por lo tanto la bola no choca con el árbol pues llega al suelo mucho antes. Veamos el punto de impacto con el suelo:

$$y = 14t - 5t^2 = 0 \to t(14 - 5t) = 0 \to$$

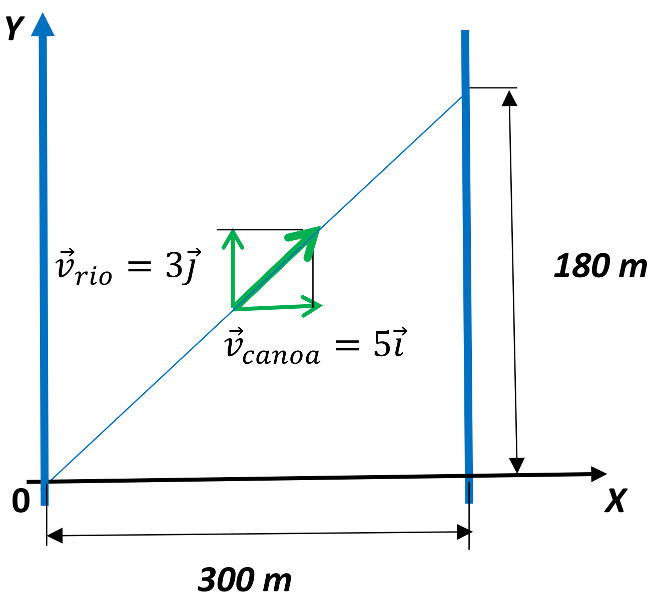
$$\to \begin{cases} t = 0 \\ 14 - 5t = 0 \to t = \dfrac{14}{4}s \end{cases}$$

El valor de ***t=0*** corresponde al inicio y no nos interesa. En ***t=2,8s*** llega al suelo después de lanzarlo. La "x" en ese tiempo es

$$\boldsymbol{x} = 14\sqrt{3}t \to x(2{,}8) \cong \boldsymbol{67{,}9\ m}$$

Problema 3

El motor de una canoa es capaz de mantenerla con una velocidad respecto del agua de 5m/s. Se quiere cruzar un rio de 300 metros de anchura partiendo del punto A y dirigiendo la canoa al punto de la orilla situado en frente, siendo la velocidad del rio de 3m/s, tal como indica la figura. Deducir el tiempo que le costará cruzar el rio, el punto de la otra orilla donde llega. Calcular la velocidad de la canoa para un observador situado en la tierra y dibujar la trayectoria seguida por esta para dicho observador.



Se trata de un movimiento de aceleración constante ($\vec{a} = 0$). Aplicamos la ley:

$$\vec{r}_0 = \vec{0};\ \vec{v}_0 = 5\vec{i} + 3\vec{j};\ \vec{a} = 0$$

Entonces:

$$\vec{r}(t) = (5\vec{i} + 3\vec{j})t \rightarrow \vec{r} = 5t\vec{i} + 3t\vec{j} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = 5t} \\ \boldsymbol{y = 3t} \end{cases}$$

Llega a la otra orilla cuando *x=300*

$$\rightarrow 5t = 300 \rightarrow t = 60$$

En ese momento

$$y = 3t \rightarrow \boldsymbol{y(60) = 180\ m}$$

La barca se ha desplazado verticalmente 180 metros. Con estos datos, el punto a donde llega se ha dibujado en la figura. La ecuación de la trayectoria la deducimos de las expresiones de x e y en función del tiempo:

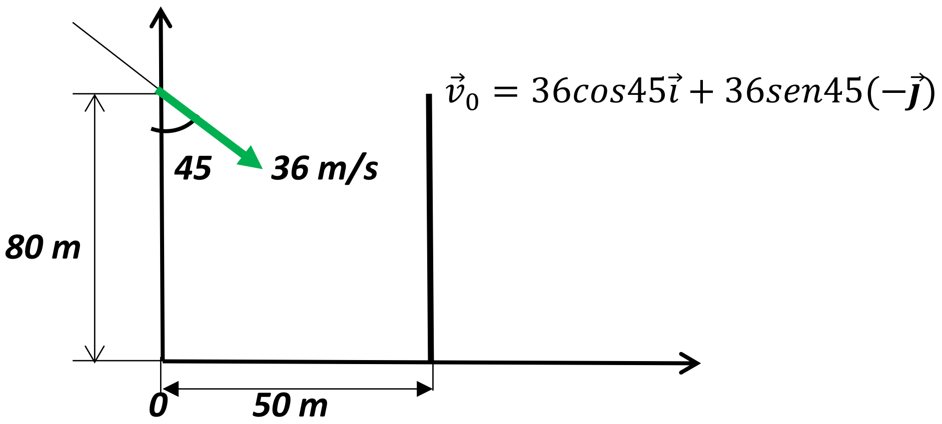
$$\begin{cases} x = 5t \\ y = 3t \end{cases}$$

Despejando t en la ecuación de x y llevándolo a y:

$$t = \frac{x}{5} \rightarrow y = 3\frac{x}{5} \rightarrow \boldsymbol{y = \frac{3}{5}x}$$

Problema 4

Un objeto inicia la caída desde un tejado, de altura 80m, con velocidad de 36m/s formando 45º con la vertical hacia abajo, tal como indica la figura. Las casas de enfrente están a 50 metros. Deducir si el objeto caerá a la calle o, si, por el contrario, impacta en las casas de enfrente y calcular asimismo la velocidad con la que lo hace y el ángulo que forma esta velocidad con la horizontal.



Utilizando la misma ley del movimiento uniformemente acelerado tenemos:

$$\boldsymbol{\vec{r}_0 = 80\vec{j}}$$

$$\vec{v}_0 = 36\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} + 36\frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{\jmath}) = \mathbf{18\sqrt{2}\vec{\imath} - 18\sqrt{2}\vec{\jmath}}$$

Se ha tenido en cuenta, como no puede ser de otra manera, que la componente vertical de la velocidad es hacia abajo y, por lo tanto, negativa.

$$\vec{a} = -10\vec{\jmath}$$

Y sustituyendo en la ley general del movimiento de aceleración constante

$$\vec{r}(t) = 80\vec{\jmath} + \left(18\sqrt{2}\vec{\imath} - 18\sqrt{2}\vec{\jmath}\right)t - \frac{1}{2}10t^2\vec{\jmath}$$

Y agrupando componentes:

$$\boldsymbol{\vec{r}(t) = 18\sqrt{2}t\vec{\imath} + (80 - 18\sqrt{2}t - 5t^2)\vec{\jmath}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = 18\sqrt{2}t} \\ \boldsymbol{y = 80 - 18\sqrt{2}t - 5t^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{v_x = 18\sqrt{2}} \\ \boldsymbol{v_y = -18\sqrt{2} - 10t} \end{cases}$$

Como ya hemos comentado, a partir de estas ecuaciones preguntamos lo que nos interese. En nuestro caso nos interesa saber si pega o no con la casa de enfrente. Esto lo podemos hacer de varias maneras: podemos, por ejemplo, calcular la distancia horizontal cuando llega al suelo: si nos sale mayor que 50 es que pega antes en la casa. También podemos calcular la altura, ***y,*** cuando la anchura ***x es 50*** y si nos sale positiva esa es la altura a la que choca con la casa (si sale negativa es que llega a la calle antes de chocar con la casa). Esta última opción es la que elegimos:

$$Si\ x = 50 \rightarrow x = 18\sqrt{2}t \rightarrow 50 = 18\sqrt{2}t \rightarrow t \cong 0{,}51$$

$$\rightarrow y(0{,}51) = 80 - 18\sqrt{2}\cdot 0{,}51 - 5(0{,}51)^2 \cong 65{,}72$$

Choca pues con la casa de enfrente a esa altura.

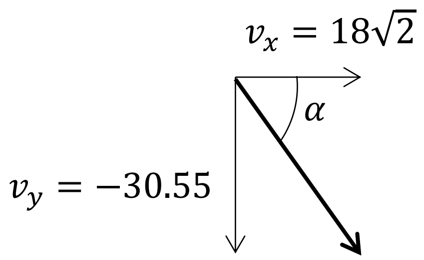
La velocidad en ese momento se calcula sustituyendo el valor del tiempo en las componentes de la velocidad:

$$\begin{cases} v_x = 18\sqrt{2} \\ v_y = -18\sqrt{2} - 10t \to v_y(0{,}51) = -18\sqrt{2} - 10 \cdot 0{,}51 \cong -30{,}55 \end{cases}$$

La rapidez en ese momento:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(18\sqrt{2})^2 + (-30{,}55)^2} \cong \mathbf{39{,}76\,m/s}$$

El ángulo con la horizontal que forma la velocidad se calcula fácilmente con trigonometría:



$$tg\alpha = \frac{30.55}{18\sqrt{2}} \to \alpha = arctg\frac{30.55}{18\sqrt{2}} = 50.20\ º$$