EJERCICIOS DE LÍMITES

En este archivo vamos a resolver algunos límites que consideramos muy representativos.

INDETERMINACIÓN

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Ejemplo 1

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x+2}{x^3+x^2-5}}$$

Como debemos de recordar, **un polinomio es equivalente al término de mayor grado cuando "x" tiende a más o menos infinito.**

$$lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x+2}{x^3+x^2-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^3}=\mathbf{2}$$

Ejemplo 2

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x^3+x-1)^4(x+3)^5}{(3x^4-x)^3(3x)^5}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x^3+x-1)^4(x+3)^5}{(3x^4-x)^3(3x)^5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x^3)^4(x)^5}{(3x^4)^3(3x)^5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2^4x^{12}x^5}{3^3x^{12}3^5x^5}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^4x^{17}}{3^8x^{17}}=\frac{\mathbf{2^4}}{\mathbf{3^8}}$$

Ejemplo 3

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{27x^6+x}}{2x}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{27x^6+x}}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{27x^6}}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{2}=-\infty$$

INDETERMINACIÓN

$$\mathbf{\frac{0}{0}}$$

Ejemplo 1

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-5}\frac{x^2+3x-10}{5+x}}$$

$$\lim_{x\to-5}\frac{x^2+3x-10}{5+x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to-5}\frac{(x+5)(x-2)}{(5+x)}$$

$$\lim_{x\to-5}(x-2)=\mathbf{-7}$$

Ejemplo 2

$$\boldsymbol{\lim_{x\to3}\frac{-x^2+5x-6}{x^3-5x^2+6x}}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{-x^2+5x-6}{x^3-5x^2+6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to3}\frac{(x-2)(-x+3)}{x(x-2)(x-3)}$$

Donde en el denominador, antes de descomponer por Ruffini, se ha sacado factor común ***"x"***

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-2)(-x+3)}{x(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{(-x+3)}{x(x-3)} = \frac{-1}{x} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

Destacamos en este problema la simplificación de los dos monomios *(-x+3) y (x-3)* cuyo cociente no es 1 sino -1.

Ejemplo 3

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 5} \frac{x^2-5x}{x^2-10x+25}}$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-5x}{x^2-10x+25} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 5} \frac{x(x-5)}{(x-5)^2} = \lim_{x\to 5} \frac{x}{x-5} = \left(\frac{5}{0}\right)$$

Como hemos dicho en la teoría, un número dividido entre una expresión que tiende a cero, como en nuestro caso, NO ESTÁ INDETERMINADO**. En este caso tenemos que hacer los límites laterales**.

$$\lim_{x\to 5^-} \frac{x}{x-5} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{x}{x-5} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

Concluyendo que está función no tiene límite cuando ***"x"*** tiende a cinco pues toma valores distintos por la izquierda y por la derecha.

INDETERMINACIÓN

$$\infty - \infty$$

Ejemplo 1

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{x^2-6x-8}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{x^2-6x-8} = (\infty-\infty) =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{x^2-6x-8}\right)\left(\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-6x-8}\right)}{\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-6x-8}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2-2x+4)-(x^2-6x-8)}{\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-6x-8}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x+12}{\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-6x-8}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{2x} = \mathbf{2}$$

Ejemplo 2

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^4+x-6}-x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^4+x-6}-x = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^4+x-6}-x\right)\left(\sqrt{x^4+x-6}+x\right)}{\sqrt{x^4+x-6}+x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+x-6-x^2}{\sqrt{x^4+x-6}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{\sqrt{x^2}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2} = \infty$$

victor loza
ACADEMIA ONLINE

INDETERMINACIÓN

$$\mathbf{1^{\infty}}$$

Ejemplo 1

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{2x+3}}$$

Base:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

Exponente:

$$\lim_{x\to\infty}2x+3=\infty$$

Por lo tanto, tenemos una indeterminación 1^{∞} y aplicamos la ley que hemos dado en la teoría:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=e^{\lim_{x\to x_0}g(x)[f(x)-1]}}$$

En nuestro caso:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{2x+3}=e^{\lim_{x\to\infty}(2x+3)\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}-1\right)}\quad(1)$$

Hacemos el límite que aparece en el exponente:

$$\lim_{x\to\infty}(2x+3)\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}-1\right)=\lim_{x\to\infty}(2x+3)\left(\frac{x^2+1-(x^2-1)}{x^2-1}\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}(2x+3)\frac{2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+6}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}=0$$

Y no nos olvidamos de sustituir en la expresión (1)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{2x+3}=e^{\lim_{x\to\infty}(2x+3)\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}-1\right)}=e^0=\mathbf{1}$$

En el siguiente ejemplo queremos remarcar la importancia de que, antes de aplicar el método que corresponda a cada indeterminación, hemos de saber que nos enfrentamos, efectivamente, a una indeterminación del tipo que sea.

Por ejemplo, en un límite parecido al anterior como este:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x^2-1}\right)^{2x+3}$$

Debemos hacer primero, como sabemos, el límite de la base y del exponente:

Base:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

Exponente:

$$\lim_{x\to\infty} 2x+3=\infty$$

Siendo entonces el resultado:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x^2-1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}=0$$

Ya que el número ***(1/2)*** **elevado a infinito NO ESTÁ INDETERMINADO** y su valor es cero, como debemos de saber porque conocemos la función exponencial.

Lo mismo se puede decir de todas las demás expresiones indeterminadas. **Antes de aplicar los métodos para resolver el límite, debemos tener claro que, efectivamente, se trata de una indeterminación**