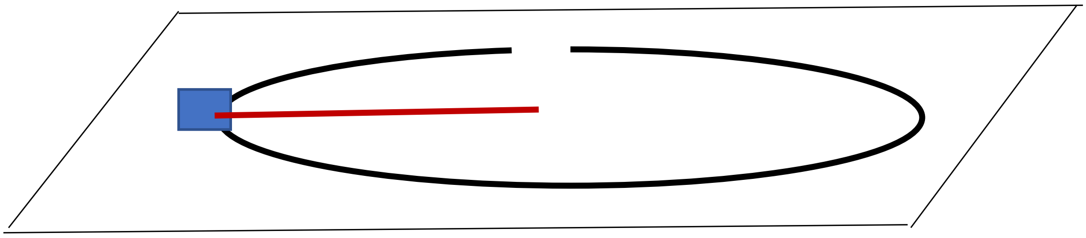
PROBLEMAS DE ROTACIÓN

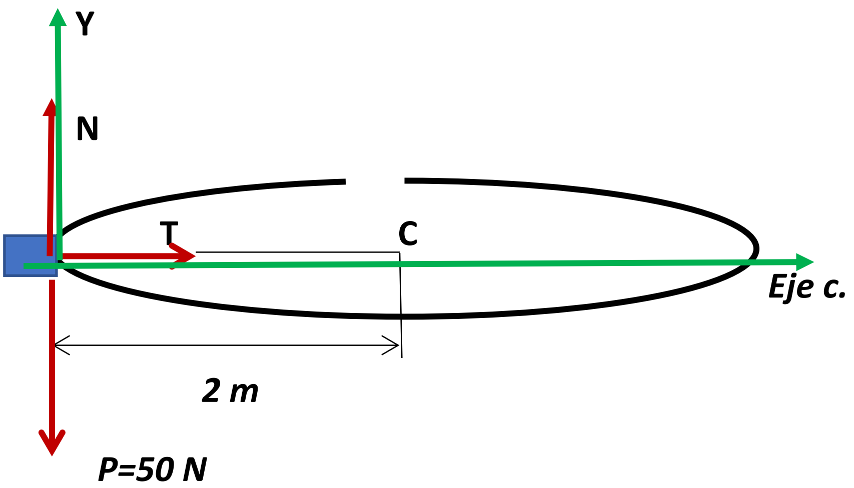
Problema 1

Una masa de 5 Kg está atada a una cuerda de 2m de larga y gira en un plano horizontal sobre una mesa sin rozamiento. Calcular la tensión en la cuerda sabiendo que gira a 30 r.p.m.



1º Diagrama de Fuerzas:

Elegimos una vista "de perfil" para ver mejor las fuerzas. Como hemos visto en las lecciones de teoría, tenemos el peso, vertical hacia abajo, y las demás, que se transmiten por los contactos que el cuerpo tiene con el exterior. En nuestro caso los contactos son la superficie de apoyo y la cuerda. Como no hay rozamiento, la superficie de apoyo ejerce sólo la normal. La cuerda ejerce una tensión "hacia su centro", hacia el punto ***C***, centro del giro.



2º Descomposición sobre eje centrípeto (eje que une el cuerpo con el centro de la circunferencia que describe) y, como en nuestro caso la rotación es en un plano horizontal, también sobre el eje Y vertical. Ambos marcados en verde.

En nuestro caso todas las fuerzas van sobre los ejes citados.

3º Aplicamos las leyes a cada uno de los ejes:

Dado que sobre el eje Y no hay movimiento, podemos decir, como en la traslación, que la resultante de las fuerzas sobre ese eje ha de ser nula

$$\sum \boldsymbol{F_y} = \boldsymbol{0} \rightarrow \boldsymbol{N} = \boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{N} = \boldsymbol{50}$$

Sobre el eje centrípeto sabemos que hay una aceleración dirigida hacia el centro, aceleración centrípeta o normal, cuyo valor es

$$\boldsymbol{a_c} = \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{\omega^2 R}$$

Aplicando la ley a ese eje:

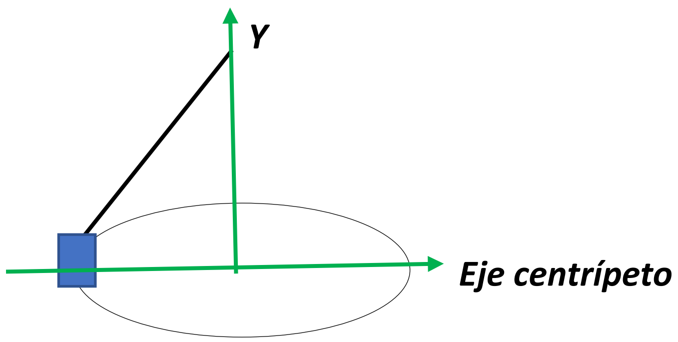
$$30\, r.p.m. = 30\frac{rev}{mn} = 30\frac{2\pi\ Rd}{60\ s} = \pi\ {}^{Rd}/_{s}$$

$$\sum \boldsymbol{F_C} = \boldsymbol{m \cdot a_c} \rightarrow \boldsymbol{T} = \boldsymbol{m\omega^2 R} \rightarrow \boldsymbol{T} = 5\pi^2 \cdot 2 \approx \boldsymbol{98.70\ N}$$

Ya que la única fuerza que va sobre ese eje es la tensión, ni el peso ni la normal tienen componentes sobre él.

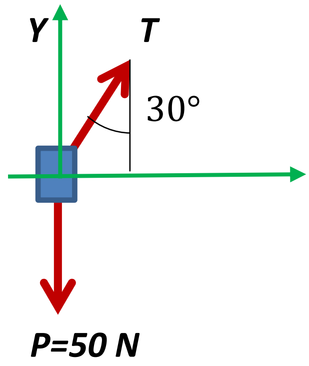
Problema 2

La misma masa anterior de 5 Kg gira sin estar apoyada en un plano horizontal atada a la misma cuerda que forma 30 grados con la vertical, tal como se indica en la figura, formando lo que se llama un péndulo cónico. Calcular la velocidad angular con la que gira, la velocidad lineal de la masa, así como la tensión en la cuerda.

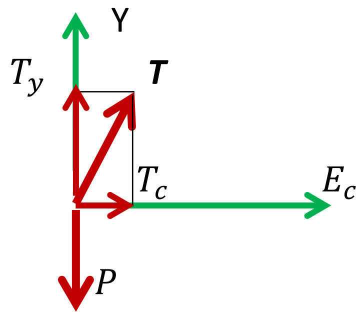


Lo primero que hacemos es enfocar el problema. Se trata claramente de una rotación y, además, sobre un plano horizontal. Ya tenemos entonces definidos los ejes respecto a los cuales hay que descomponer las fuerzas. Se marcan en verde

1º Diagrama de fuerzas:



2º Descomposición ejes (centrípeto e Y vertical pues nuestra rotación es en un plano horizontal)



$$T_y = Tcos30 = T\frac{\sqrt{3}}{2}$$

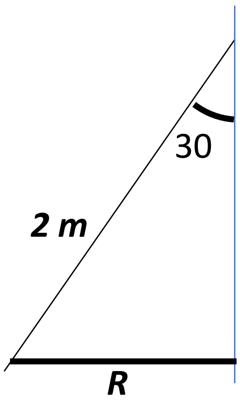
$$T_c = Tsen30 = T\frac{1}{2}$$

3º Aplicamos las leyes a cada uno de los ejes:

$$\sum \boldsymbol{F_y} = \mathbf{0} \rightarrow \boldsymbol{T_y} = \boldsymbol{P} \rightarrow T\frac{\sqrt{3}}{2} = 50 \rightarrow \boldsymbol{T} = \frac{\mathbf{100}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$$

$$\sum \boldsymbol{F_c} = \boldsymbol{ma_c} \rightarrow \boldsymbol{T_c} = \boldsymbol{m\omega^2 R} \rightarrow T\frac{1}{2} = 5 \cdot \omega^2 R$$

En esta última ecuación conocemos la tensión y el radio también, según la figura



$$\boldsymbol{R} = 2sen30 = \mathbf{1}\ \boldsymbol{m}$$

$$\sum F_c = ma_c \rightarrow T_c = m\omega^2 R \rightarrow \boldsymbol{T}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \mathbf{5}\boldsymbol{\omega^2} \cdot \mathbf{1}$$

Sustituyendo el valor de la tensión:

$$\frac{100}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = 5\omega^2 1 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{100}{10\sqrt{3}}} \approx 2.40\ {}^{Rd}/_{s}$$

$$\boldsymbol{v = \omega R} \rightarrow v = 2.40 \cdot 1 \rightarrow \boldsymbol{v = 2.40\ {}^{m}/_{s}}$$

Problema 3

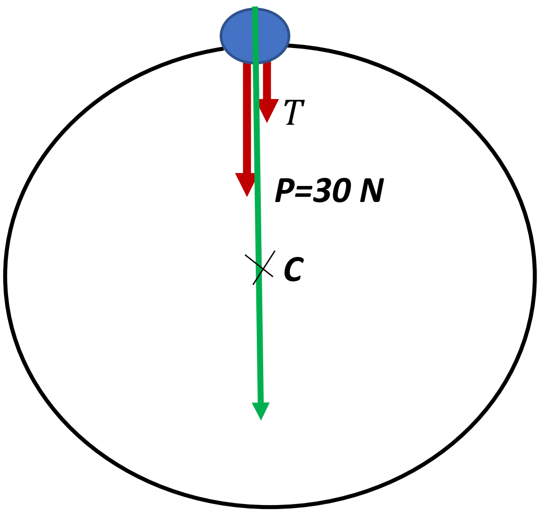
Una masa de 3 Kg gira en un plano vertical, atada a una cuerda de 4m de largo, con velocidad angular de 40 r.p.m. Calcular la tensión de la cuerda en a) el punto más alto b) el punto más bajo c) en el punto en el que la cuerda está horizontal d) en un punto donde la cuerda forma 30 grados con la horizontal (hacia arriba) e) ¿Hay alguna velocidad mínima por debajo de la cual la masa no llega arriba con la cuerda tensa?

Pasamos al S.I. la velocidad angular:

$$\omega = 40\frac{rev}{mn} = 40\frac{2\pi\, Rd}{60\, S} = \frac{4}{3}\pi\, {}^{Rd}/_{s}$$

a) Punto más alto.

1º Diagrama de fuerzas:



2º Descomposición sobre eje centrípeto

La rotación no es en un plano horizontal y con el eje centrípeto o normal suele ser suficiente. En nuestros problemas es raro necesitar el eje tangencial.

Todas nuestras fuerzas están sobre el eje centrípeto.

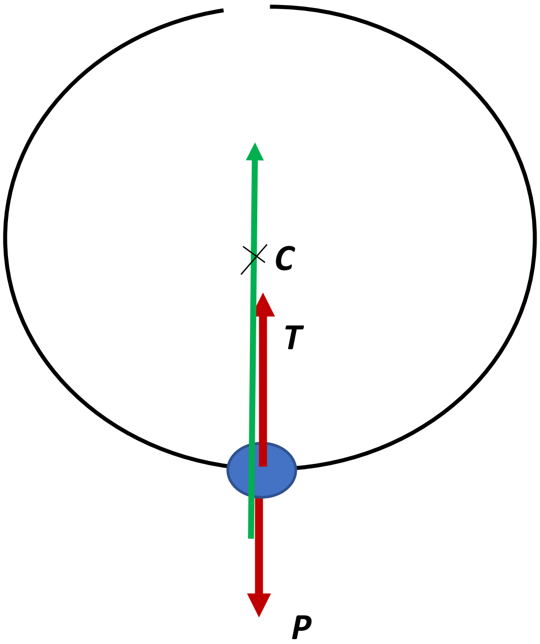
3º Aplicamos las leyes de la rotación:

$$\sum \boldsymbol{F_c} = \boldsymbol{m a_c} \rightarrow \boldsymbol{P} + \boldsymbol{T} = \boldsymbol{m\omega^2 R} \rightarrow 30 + T = 3(\tfrac{4}{3}\pi)^2 \cdot 4$$

$$30 + T = 3\left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 \cdot 4 \rightarrow \boldsymbol{T \approx 210.55\ N}$$

b) En el punto más bajo

1º Diagrama de fuerzas:



2º Descomposición eje centrípeto:

Como vemos en la figura las dos fuerzas están ya sobre dicho eje.

3º Aplicamos la ley al eje centrípeto

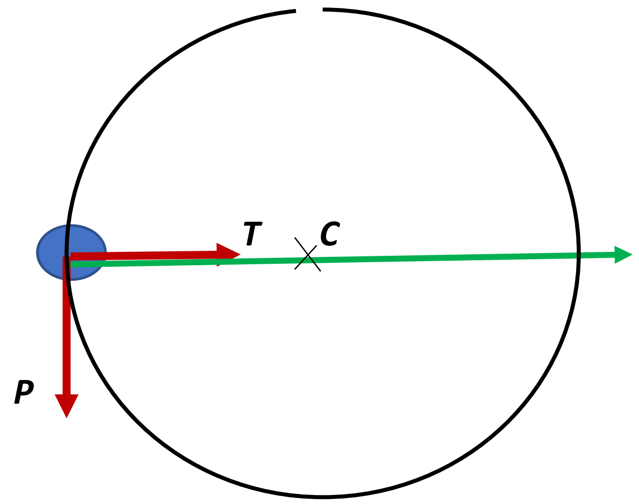
$$\sum F_c = ma_c \rightarrow T - P = m\omega^2 R \rightarrow T - 30 = 3(\frac{4}{3}\pi)^2 \cdot 4$$

$$\boldsymbol{T \cong 240,55\ N}$$

Fijarse que el peso lo hemos restado. Cuando decimos resultante sobre el eje centrípeto sumamos las que van hacia el centro y restamos las que van hacia afuera porque sabemos, por teoría, que la aceleración centrípeta es hacia el centro.

c) En el punto donde la cuerda está horizontal

1º Diagrama de fuerzas:



2º Descomposición sobre eje centrípeto

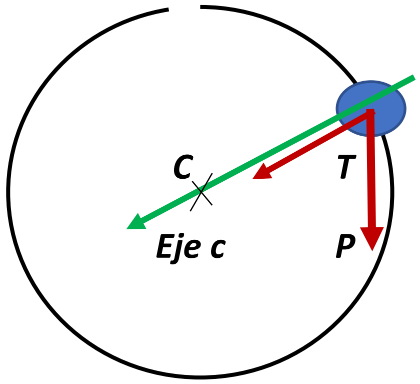
El peso no tiene componente centrípeta y la tensión va ya sobre ese eje.

3º Aplicación de la ley al eje centrípeto:

$$\sum F_c = ma_c \rightarrow T = m\omega^2 R \rightarrow \boldsymbol{T = 3(\tfrac{4}{3}\pi)^2 4 \cong 210,55\ N}$$

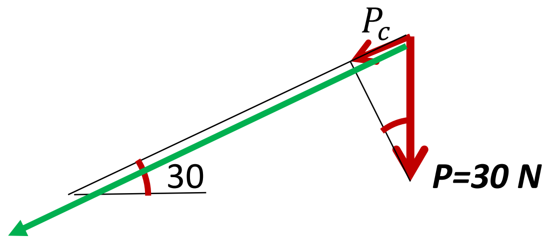
d) Un punto en donde la cuerda forma 30 grados con la horizontal

1º Diagrama de fuerzas:



2º Descomposición sobre eje centrípeto (verde)

La tensión ya va sobre el eje centrípeto. Sólo tenemos entonces que calcular la componente centrípeta del peso:



$$P_c = Psen30 = 30sen30 = 15$$

3ºAplicación de la ley al eje centrípeto:

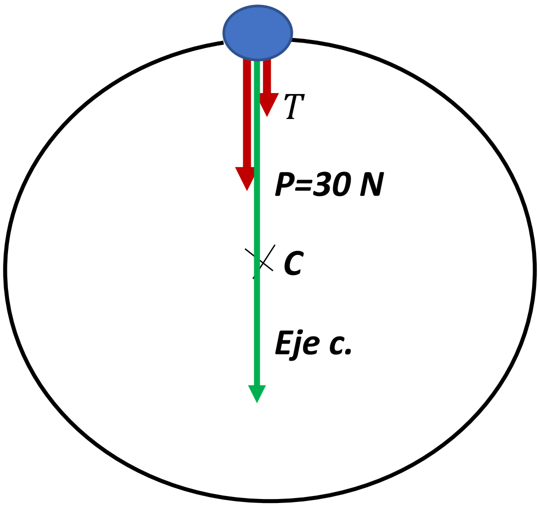
$$\sum F_c = ma_c \rightarrow P_c + T = m\omega^2 R \rightarrow 15 + T = 3(\frac{4}{3}\pi)^2 \cdot 4$$

$$\boldsymbol{T \cong 195,55N}$$

e) ¿Existe una velocidad mínima por debajo de la cual la cuerda se destensa antes de llegar arriba?

Sabemos por intuición que una masa atada a una cuerda y girando en un plano vertical puede “caerse” si la velocidad no es la adecuada (un cubo lleno de agua lo podemos hacer girar sin que el agua se caiga, pero sabemos que la velocidad no puede ser “muy pequeña”).

Vamos a estudiar, **según sea la velocidad,** el punto más favorable para que se “caiga”: el punto de arriba



En función de la velocidad, vamos a calcular la tensión:

$$T + P = m\frac{v^2}{R} \rightarrow T = m\frac{v^2}{R} - mg$$

Pero, como se ha dicho en la teoría, **la tensión no puede ser negativa.** Eso significaría que la cuerda empuja hacia arriba y ese es un esfuerzo que no pueden hacer las cuerdas. Por lo tanto, imponemos la condición de que arriba sea positiva

$$T = \boldsymbol{m}\frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{R}} - \boldsymbol{mg} > \mathbf{0} \rightarrow m\frac{v^2}{R} > mg \rightarrow v^2 > Rg \rightarrow$$

$$\rightarrow \boldsymbol{v} > \sqrt{\boldsymbol{Rg}}$$

Siendo esta **la velocidad mínima que un cuerpo ha de tener en el punto más alto de la circunferencia en un giro en un plano vertical atado a una cuerda.**

Este último resultado es típico. En nuestro problema nos queda:

$$\boldsymbol{v} > \sqrt{\mathbf{4 \cdot 10}} \cong \mathbf{6,32}\, {}^{\boldsymbol{m}}/_{\boldsymbol{s}}$$

Como $v = \omega R \rightarrow \omega \cdot 4 > 6{,}32 \rightarrow \boldsymbol{\omega} > \mathbf{1,58}\, {}^{\boldsymbol{Rd}}/_{\boldsymbol{s}}$