EJEMPLOS DE CÁLCULO DE INTEGRALES Y SUS APLICACIONES

En estos apuntes vamos a hacer unos cuantos problemas donde aparece el concepto y el cálculo de integrales, elegidas de problemas de exámenes de Selectividad, para que practiquemos lo que hemos dicho en el apartado de teoría. Volvemos a hacer hincapié en que antes de hacer una integral pensemos a qué tipo de las que se han visto en teoría pertenece, para poder elegir el camino adecuado.

Problema 1 (Andalucía 2018)

Dada la función $y = Ln(2x + e)$ se pide:

a) Dibujar esbozo de la gráfica y sus cortes con los ejes
b) Calcular el área encerrada por la función y los ejes coordenados

Nos piden un esbozo, por lo tanto, estudiaremos los puntos más importantes: domino, asíntotas, crecimiento y decrecimiento y corte con los ejes.

DOMINIO, por tratarse de un logaritmo, ha de cumplir:

$$2x + e > 0 \rightarrow 2x > -e \rightarrow \boldsymbol{x > \frac{-e}{2}}$$

ASÍNTOTAS:

Horizontales:

$$y = \lim_{x\to\infty} Ln(2x + e) = ln\infty = \infty$$

Por lo tanto, **no tiene asíntotas horizontales**.

Verticales;

El único valor posible de la variable para que la función se acerque a infinito (positivo o negativo) es

$$\boldsymbol{x = -\frac{e}{2}} \rightarrow \lim_{x\to-\frac{e}{2}^+} Ln(2x + e) = Ln0^+ = -\infty$$

Por lo tanto

$$\boldsymbol{x = -\frac{e}{2}}$$

Es asíntota vertical.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS:

$$y = Ln(2x+e) \to y' = \frac{1}{2x+e} \cdot 2$$

Y, dado que

$$2x + e > 0 \; \forall x \in D \to \boldsymbol{y' > 0}$$

La función es **siempre creciente**.

CORTES CON LOS EJES

Eje X:

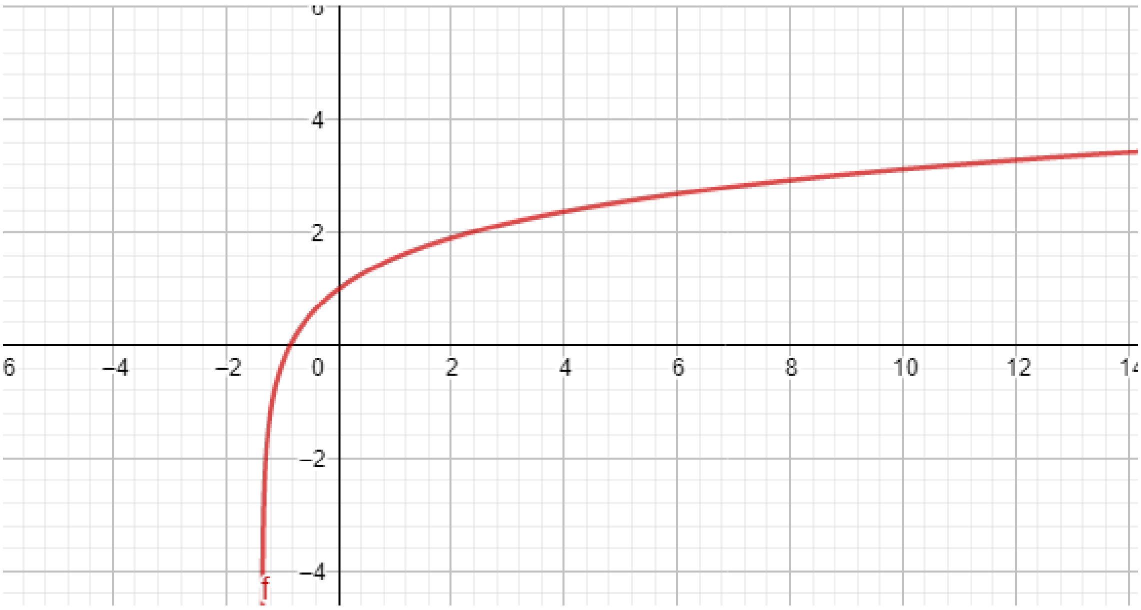
$$\begin{cases} y = Ln(2x+e) \\ y = 0 \end{cases} \to Ln(2x+e) = 0 \to 2x + e = 1 \to x = \frac{1-e}{2} \approx -0.8$$

$$(\mathbf{-0.8, 0})$$

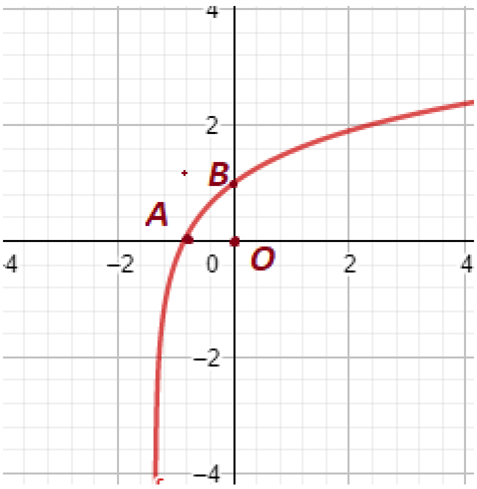
Eje Y

$$\begin{cases} y = Ln(2x+e) \\ x = 0 \end{cases} \to y = Ln(e) = 1 \to (\mathbf{0, 1})$$

Con esta información, el dibujo de la gráfica es el siguiente:



Para responder a la segunda pregunta, una vez dibujada la gráfica, pensamos que es fácil ver que nos preguntan el área delimitada por los puntos ***A,*** corte de la gráfica con el eje ***X,*** el punto ***B,*** corte de la gráfica con el eje ***Y,*** y el origen de coordenadas, ***O***.



Como debemos de saber, dicha área se calcula por:

$$A = \int_{\frac{1-e}{2}}^{0} Ln(2x+e)dx$$

En la teoría ya hemos advertido de que si se puede hacer cambio de variable se haga obligatoriamente, aunque después sea por partes o racional. En este caso, tendríamos que ver que aparece la función lineal $2x+e$. A esa función la llamaremos ***"t"*** pero al tratarse de una integral definida tendremos que cambiar los límites de integración. De todas formas, después la haremos sin cambio de variable para que cada cual elija.

$$A=\int_{\frac{1-e}{2}}^{0} Ln(2x+e)dx=\left|\begin{array}{c} 2x+e=t\rightarrow 2dx=dt\rightarrow dx=\dfrac{dt}{2} \\ \begin{cases} x=\dfrac{1-e}{2}\rightarrow |2x+e=t|\rightarrow t=1 \\ \qquad x=0\rightarrow t=e \end{cases} \end{array}\right|=$$

$$=\int_{1}^{e} Lnt\frac{dt}{2}=\left|\begin{array}{c} Lnt=u\rightarrow \dfrac{1}{t}dt=du \\ dt=dv\rightarrow t=v \end{array}\right|=\frac{1}{2}[tLnt]_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e t\cdot\frac{1}{t}dt=$$

$$\frac{1}{2}(eLne-1Ln1)-\frac{1}{2}[t]_1^e=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\ u^2}$$

Ahora, la hacemos sin cambio de variable:

$$\int \boldsymbol{Ln(2x+e)dx}=\left|\begin{array}{c} u=Ln(2x+e)\rightarrow du=\dfrac{1}{2x+e}\cdot 2dx \\ dx=dv\rightarrow x=v \end{array}\right|=$$

$$xLn(2x+e)-\int x\frac{1}{2x+e}2dx=\boldsymbol{xLn(2x+e)-2\int\frac{xdx}{2x+e}}\,(1)$$

La integral dada se ha transformado en una integral racional en donde el grado del numerador es igual que el grado del denominador. Seguimos las pautas que se han indicado en la teoría, hacemos la división:

$$\begin{array}{r|l} x & 2x+e \\ \hline -x-\dfrac{1}{2}e & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2}e & \end{array}$$

Por lo tanto, aplicando la fórmula que nos transforma la fracción en dos sumandos:

$$\frac{D}{d}=C+\frac{R}{d}\rightarrow\frac{x}{2x+e}=\frac{1}{2}+\frac{-\frac{1}{2}e}{2x+e}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e\frac{1}{2x+e}$$

Y la integral última queda:

$$\int\frac{xdx}{2x+e}=\int\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}e\int\frac{1}{2x+e}dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}e\frac{1}{2}Ln(2x+e)$$

Que sustituyendo en la expresión ***(1)***

$$\boldsymbol{\int Ln(2x+e)dx=xLn(2x+e)-2\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}eLn(2x+e)\right]=}$$

$$\boldsymbol{=xLn(2x+e)-x+\frac{1}{2}eLn(2x+e)}$$

Y, aplicando los límites de integración para calcular el área:

$$\boldsymbol{A}=\left[xLn(2x+e)-x+\frac{1}{2}eLn(2x+e)\right]_{\frac{1-e}{2}}^{0}=$$

$$\left[0Lne-0+\frac{1}{2}eLne\right]-\left[\frac{1-e}{2}Ln1-\frac{1-e}{2}+\frac{1}{2}eLn1\right]$$

$$\left[\frac{1}{2}e\right]-\left[-\frac{1-e}{2}\right]=\boldsymbol{\frac{1}{2}\,u^2}$$

Problema 2 (Madrid 2022)

Dada la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}x^3e^{-\frac{1}{x^2}}\ si\ x\neq 0\\ 0\ si\ x=0\end{cases}}$$

Estudie la continuidad y derivabilidad en x = 0

Estudie sus simetrías

Calcule

$$\boldsymbol{\int_1^2\frac{f(x)}{x^6}dx}$$

Empezamos por la continuidad en ***x = 0***

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim_{x\to 0^-} x^3 e^{-\frac{1}{x^2}} = (0^- \cdot e^{-\infty} = 0^- \cdot 0^+ = 0) = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} x^3 e^{-\frac{1}{x^2}} = (0^+ \cdot e^{-\infty} = 0^+ \cdot 0^+ = 0) = 0 \end{cases}$$

La función es entonces continua, dado que la función es igual al límite.

Veamos su derivabilidad. Por teoría, tendríamos que hacer los siguientes límites que provienen de la definición de derivada:

$$y(0)'_- = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$y(0)'_+ = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Pero, por tratarse de la misma función, tanto a la derecha como a la izquierda de **"cero",** basta un único límite. Si en su desarrollo vemos que hay que hacer los límites laterales ya los haremos:

$$y(0)' = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x^2 e^{-\frac{1}{x^2}}$$
$$= (0^+ \cdot e^{-\infty} = 0^+ \cdot 0^+) = 0$$

Por lo tanto, también **es derivable en *x = 0*:**

$$\boldsymbol{y(0)' = 0}$$

Estudiamos sus posibles simetrías:

$$\begin{cases} f(x) = x^3 e^{-\frac{1}{x^2}} \\ \boldsymbol{f(-x)} = (-x)^3 e^{-\frac{1}{(-x)^2}} = -x^3 e^{-\frac{1}{x^2}} = \boldsymbol{-f(x)} \end{cases}$$

La función es impar o simétrica respecto al origen.

Vamos con el último punto, la integral:

$$\int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} \frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{x^6}} \boldsymbol{dx} = \int_1^2 \frac{x^3 e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^6} dx = \int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx$$

Aquí, insistimos, nos debemos de parar a pensar de que tipo es, según la teoría que hemos explicado en el lugar dedicado a ello. En principio, nos podría parecer que es "por partes", dada la mezcla de una exponencial con una polinómica. Se puede intentar, pero, advertimos ya, que la integral

$$\int e^{-\frac{1}{x^2}} dx$$

No se puede hacer por métodos algebraicos. Dado que tampoco es racional ni trigonométrica, hemos de pensar, obligatoriamente, en uno de los dos cambios de variable de los que hemos hablado en la teoría. Como no aparece la función lineal, **no nos queda más remedio que buscar una función y su derivada multiplicando al *dx*.** Como la derivada de la exponencial es ella misma por la derivada del exponente, intentamos el siguiente cambio (tampoco hay muchas posibilidades). Si no funciona ya veremos

$$\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx = \left| e^{-\frac{1}{x^2}} = t \to \boldsymbol{e^{-\frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{\boldsymbol{-1 \cdot 2x}}{\boldsymbol{x^4}}\right) \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{dt} \right|$$

Si simplificamos la última expresión:

$$e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} dx = dt$$

Y si pasamos el número *2 al otro lado, debemos de ver que todo el integrando es dt/2:*

$$\int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} \frac{\boldsymbol{e^{-\frac{1}{x^2}}}}{\boldsymbol{x^3}} \boldsymbol{dx} = \left| \begin{array}{c} e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^3} dx = \frac{dt}{2} \\ x = 1 \to \left| e^{-\frac{1}{x^2}} = t \right| \to t = e^{-1} \\ x = 2 \to t = e^{-\frac{1}{4}} \end{array} \right| = \int_{e^{-1}}^{e^{-\frac{1}{4}}} \frac{dt}{2} = \left[\frac{1}{2} t\right]_{e^{-1}}^{e^{-\frac{1}{4}}} =$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\boldsymbol{e}^{-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}}-\boldsymbol{e}^{-\mathbf{1}}\right)$$

La verdad es que suelen ser más sencillos los problemas de PAU, así que ánimo. Lo hemos hecho porque es del 2022 y para que tengáis una idea del nivel al que se puede llegar, aunque, viendo la resolución, excepto la integral, tampoco es para tanto. Vamos a acabar con este último problema.

Problema 3 (La Rioja 2021)

Calcular el área del recinto limitado por la función

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x+3}{(x+2)^2}}$$

El eje OX y las rectas x = 0 y x = 5.

Como sabemos por teoría, hemos de conocer si en el recinto de integración las dos funciones que conforman el área, en este caso la función dada y el eje ***X***, **hay siempre una por encima y la otra por debajo o no**. En nuestro caso, creemos que es fácil ver que la función, dada su expresión, es siempre positiva entre ***x = 0*** y ***x = 5*** y que, por lo tanto, está por encima del eje ***X.*** El área será entonces:

$$A=\int_0^5 \frac{x+3}{(x+2)^2}dx$$

Es claramente una racional con raíces reales múltiples en el denominador. Aplicando la descomposición que tenemos que recordar:

$$\boldsymbol{\frac{x+3}{(x+2)^2}}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}=\boldsymbol{\frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2}}\rightarrow$$

$$x+3=A(x+2)+B\rightarrow\begin{cases} x=-2\rightarrow 1=B \\ x=0\rightarrow 3=2A+1\rightarrow A=1\end{cases}\rightarrow$$

$$\boldsymbol{\frac{x+3}{(x+2)^2}}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}=\boldsymbol{\frac{1}{x+2}+\frac{1}{(x+2)^2}}\rightarrow$$

$$\int_0^5 \frac{x+3}{(x+2)^2}dx = \int_0^5 \frac{1}{x+2}dx + \int_0^5 \frac{1}{(x+2)^2}dx$$

La primera integral es un logaritmo neperiano.

$$\int_0^5 \frac{1}{x+2}dx = [Ln(x+2)]_0^5 = Ln7 - Ln2 = \boldsymbol{Ln\frac{7}{2}}$$

Hacemos la segunda:

$$\int_0^5 \frac{1}{(x+2)^2}dx = \left| \begin{matrix} x+2=t \to dx=dt \\ x=0 \to t=0+2=2 \\ x=5 \to t=5+2=7 \end{matrix} \right| = \int_2^7 \frac{1}{t^2}dt =$$

$$\int_2^7 t^{-2}dt = \left[\frac{t^{-2+1}}{-2+1}\right]_2^7 = \left[-\frac{1}{t}\right]_2^7 = -\frac{1}{7}+\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{5}{14}}$$

El área pedida será la suma de las dos:

$$\boldsymbol{A = Ln\frac{7}{2} + \frac{5}{14}u^2}$$