DESARROLLO DE DETERMINANTES. APLICACIÓN DE LAS PROPIEDADES

En estos pocos problemas vamos a intentar dejar las propiedades de los determinantes que se han visto en teoría más claras. Estas propiedades se van a aplicar para relacionar los valores de varios determinantes dados. También las vamos a utilizar para desarrollar un determinante de tercer orden, de una manera más cómoda que aplicando Sarrus, o cuarto orden.

Problema 1

Sabiendo que el determinante

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i} \end{vmatrix} = \mathbf{3}$$

Calcular el valor de los determinantes:

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{b+5c} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{e+5f} & \boldsymbol{d} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{h+5i} & \boldsymbol{g} & \boldsymbol{i} \end{vmatrix} \ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{5a} & \boldsymbol{5d} & \boldsymbol{5g} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{\frac{c}{2}} & \boldsymbol{\frac{f}{2}} & \boldsymbol{\frac{i}{2}} \end{vmatrix}$$

Empezamos por el determinante ***A***

$$A = \begin{vmatrix} b+5c & a & c \\ e+5f & d & f \\ h+5i & g & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5c & a & c \\ 5f & d & f \\ 5i & g & i \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} c & a & c \\ f & d & f \\ i & g & i \end{vmatrix} = -3 + 0 = \mathbf{-3}$$

Donde se ha aplicado primero la propiedad que nos permite separar un determinante en suma de dos cuando una fila (o columna) está formada por sumas. Después, al cambiar una columna por otra, hemos cambiado de signo al determinante primero que aparece en la suma. Con el segundo hemos sacado factor común el número cinco que estaba multiplicando a la primera columna y, por último, hemos aplicado la ley de que un determinante vale cero cuando tiene dos columnas iguales. Vamos a por el determinante ***B***

$$\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{5a} & \boldsymbol{5d} & \boldsymbol{5g} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{\frac{c}{2}} & \boldsymbol{\frac{f}{2}} & \boldsymbol{\frac{i}{2}} \end{vmatrix} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = \frac{5}{2} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{5}{2} \cdot 3 = \boldsymbol{\frac{15}{2}}$$

En este caso, hemos sacado factor común de la primera y tercera fila y, después, hemos aplicado el hecho de que el determinante de una matriz vale lo mismo que el de su traspuesta.

Problema 2

Aplicando las propiedades, desarrollar el siguiente determinante:

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & a & b \end{vmatrix} = |1^{\text{a}}C \to 1^{\text{a}}C + 2^{\text{a}}C + 3^{\text{a}}C| = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ b+a+c & a & c \\ c+a+b & a & b \end{vmatrix} =$$

$$(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & c \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2^{\text{a}}F \to 2^{\text{a}}F - 1^{\text{a}}F \\ 3^{\text{a}}F \to 3^{\text{a}}F - 1^{\text{a}}F \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} a-b & 0 \\ a-b & b-c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)(a-b) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b-c \end{vmatrix} =$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$$

En donde, “lo más original”, ha sido darse cuenta de que todas las columnas sumaban lo mismo y, al hacerlo, hemos podido sacar factor común y conseguir una columna de “unos”. Con esa columna de “unos” ya hemos podido hacer “ceros” fácilmente en la primera columna para, finalmente, desarrollar por los adjuntos.