victor loza
ACADEMIA ONLINE

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Una identidad es una ecuación que se cumple para cualquier valor de la variable, como hemos dicho en la teoría. Aquí vamos a ver unos cuantos más ejemplos. Ya hemos advertido en la teoría que en otros textos aparecen infinidad de fórmulas-identidades. Sin embargo, creemos que con las fundamentales dadas en el archivo de teoría es suficiente, lo que no quita, claro, para el que quiera se aprenda las que le parezcan.

Ejercicio 1

Demostrar la siguiente igualdad

$$\boldsymbol{tgx + \frac{1}{tgx} = tgx \cdot \frac{1}{1 - cos^2 x}}$$

Como ya hemos quedado en la parte de teoría, cogemos cada miembro y lo simplificamos lo máximo en función de las razones trigonométricas más importantes, el seno y el coseno.

Miembro de la izquierda

$$\boldsymbol{tgx} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{tgx}} = \frac{senx}{cosx} + \frac{cosx}{senx} = \frac{sen^2 x + cos^2 x}{senx \cdot cosx} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{senx \cdot cosx}}$$

Miembro de la derecha

$$tgx \cdot \frac{1}{1 - cos^2 x} = |1 - cos^2 x = sen^2 x| \frac{senx}{cosx} \cdot \frac{1}{sen^2 x} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{cosx \cdot senx}}$$

Hemos demostrado que ambos miembros son iguales a la misma expresión, **por lo tanto, son iguales entre sí.**

Ejemplo 2

Demostrar la siguiente identidad

$$\frac{\boldsymbol{senx \cdot cosx}}{\boldsymbol{cos^2x - sen^2x}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{tg2x}$$

La parte de la derecha ya está en función de senos y cosenos del ángulo "x". Seguimos entonces con la parte de la derecha:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{tg2x} = \left|tg2x = \frac{sen2x}{cos2x} = \frac{2senx \cdot cosx}{cos^2x - sen^2x}\right| = \frac{1}{2}\frac{2senx \cdot cosx}{cos^2x - sen^2x} = \frac{\boldsymbol{senx \cdot cosx}}{\boldsymbol{cos^2x - sen^2x}}$$

Ya hemos llegado a demostrar que el miembro de la derecha es igual al miembro de la izquierda, nos ha aparecido directamente al simplificar en senos y cosenos.

Ejemplo 3

Demostrar la siguiente identidad

$$\boldsymbol{cos(x - 45) \cdot cos(x + 45)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{cos2x}$$

Insistimos, **hemos de poner todas las expresiones en función de senos y cosenos del mismo ángulo, *"x"*** en este caso:

Empezamos por el miembro de la izquierda:

$$\boldsymbol{cos(x - 45) \cdot \mathbf{cos}(x + 45)} =$$

$$(cosx \cdot cos45 + senx \cdot sen45) \cdot (cosx \cdot cos45 - sen \cdot sen45) =$$

$$cos^2x \cdot cos^245 - sen^2x \cdot sen^245 = \frac{1}{2}cos^2x - \frac{1}{2}sen^2x =$$

$$\frac{1}{2}(cos^2x - sen^2x) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{cos2x}$$

Y ya hemos llegado al miembro de la derecha, ya que, en este caso, era muy simple.

Ejemplo 4

Demostrar la siguiente identidad

$$\frac{\boldsymbol{sen2x}}{\boldsymbol{senx}}+\boldsymbol{cos}^2\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{2}}=\frac{\boldsymbol{5cosx+1}}{\boldsymbol{2}}$$

$$\frac{\boldsymbol{sen2x}}{\boldsymbol{senx}}+\boldsymbol{cos}^2\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{2}}=\frac{2senxcosx}{senx}+\frac{1+cosx}{2}=2cosx+\frac{1+cosx}{2}=$$

$$\frac{4cosx+1+cosx}{2}=\frac{\boldsymbol{5cosx+1}}{\boldsymbol{2}}$$

Ejemplo 5

Demostrar la siguiente identidad

$$\boldsymbol{sen(x+y)sen(x-y)=sen^2x-sen^2y}$$

$$\boldsymbol{sen(x+y)sen(x-y)}$$
$$=(senxcosy+cosxseny)(senxcosy-cosxseny)=$$
$$sen^2xcos^2y-cos^2xsen^2y$$

Cómo en el miembro de la derecha **sólo aparecen “senos”** vamos a poner los **“cosenos”** de la última expresión en función de **“senos”**

$$sen^2xcos^2y-cos^2xsen^2y=sen^2x\cdot(1-sen^2y)-(1-sen^2x)sen^2y$$

$$=sen^2x-sen^2x\cdot sen^2y-sen^2y+sen^2x\cdot sen^2y=$$

$$\boldsymbol{sen^2x-sen^2y}$$