Ejercicio 1

Sea el plano de ecuación $\boldsymbol{\pi \equiv 3x - y + 2z - 4 = 0}$ ***Hallar***

a) ***Hallar la ecuación del plano*** $\boldsymbol{\pi_1}$ ***que es paralelo a el plano dado y pasa por el punto*** $\boldsymbol{P(1,-2,2)}$
b) ***Hallar la ecuación del plano*** $\boldsymbol{\pi_2}$ ***perpendicular a ambos y contiene a la recta***

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 4z = 1 \end{cases}}$$

a) ***Hallar la ecuación del plano*** $\boldsymbol{\pi_1}$ ***que es paralelo a el plano dado y pasa por el punto*** $\boldsymbol{P(1,-2,2)}$

El plano π_1, por ser paralelo a π tendrá el mismo vector director (vector perpendicular al plano), el vector $\vec{v} = (3,-1,2)$ que son, como debemos de saber, los coeficientes de las variables “x”, “y” y “z” en la su ecuación. Por lo tanto, su ecuación será de la forma

$$\pi_1 \equiv 3x - y + 2z + D = 0$$

Donde el valor de D lo calculamos porque sabemos que pasa por el punto $P(1,-2,2)$ y este punto entonces ha de cumplir su ecuación. Sustituyendo las coordenadas de ese punto en el plano π_1 nos queda

$$3 \cdot 1 - (-2) + 2 \cdot 2 + D = 0 \rightarrow D = -9$$

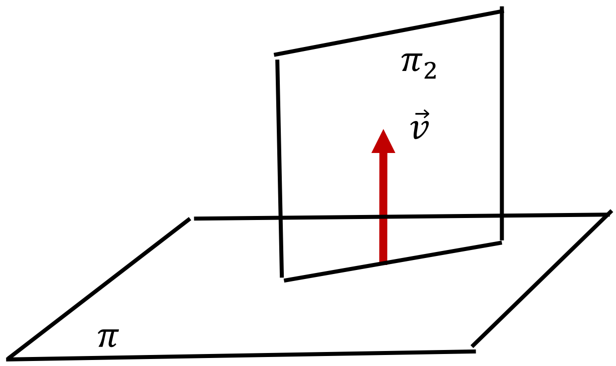
Por lo que el plano π_1 tiene de ecuación

$$\boldsymbol{\pi_1 \equiv 3x - y + 2z - 9 = 0}$$

b) Hallar la ecuación del plano π_2 perpendicular a ambos y contiene a la recta

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 4z = 1 \end{cases}}$$

Si un plano, π_2 en nuestro caso, es perpendicular a otro $\pi \equiv Ax + By + Cx + D = 0$ el vector $\vec{v} = (A, B, C)$ está contenido en él, como se observa en la figura



En nuestro caso, los dos planos a los que es perpendicular son paralelos y, por ello, atendiendo a esta condición, **sólo tenemos un vector en el que se apoya** (recordar que para definir un plano y su ecuación nos hacen falta dos vectores en los que se apoya y un punto por el que pasa o, de otra manera, un vector perpendicular a él y un punto por el que pasa).

Pero sabemos también que **contiene a una recta** y, claramente, **otro vector en el que se apoya es el de la recta dada**. Ya tenemos dos vectores en los que se apoya. Entonces:

Vector perpendicular al plano π

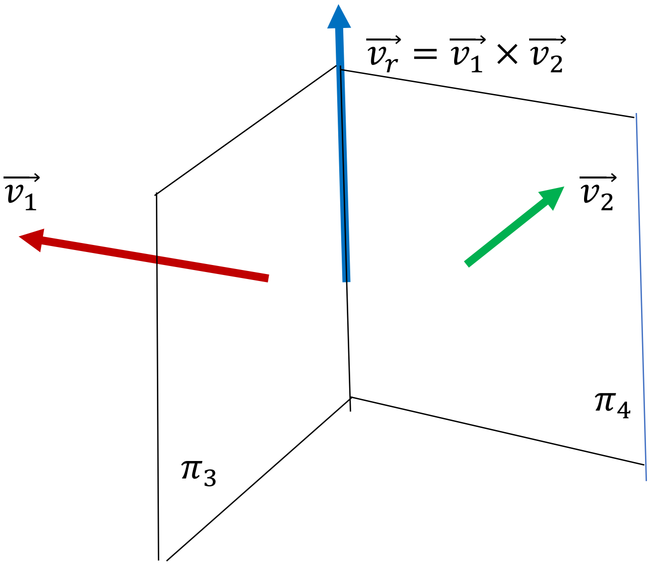
$$\pi \equiv 3x - y + 2z - 4 = 0 \rightarrow \boldsymbol{\vec{v}} = (\mathbf{3}, -\mathbf{1}, \mathbf{2})$$

Vector director de la recta ***r*** dada como intersección de los planos $\pi_3 \; y \; \pi_4$

$$r \equiv \begin{cases} \pi_3 \equiv x - y + z = 1 \\ \pi_4 \equiv 2x + y - 4z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_1} = (1, -1, 1) \\ \overrightarrow{v_2} = (2, 1, -4) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v_r}} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 3\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + 3\vec{k} = (\mathbf{3}, \mathbf{6}, \mathbf{3})$$

Donde el vector $\overrightarrow{v_r}$ de la recta lo hemos calculado teniendo en cuenta que es perpendicular a los dos vectores directores de los planos que la definen. Un vector perpendicular a dos dados es su producto vectorial, el determinante que hemos calculado. En la figura siguiente reflejamos lo anterior



Ya tenemos entonces dos vectores en los que se apoya el plano pedido, el vector director de la recta y el vector perpendicular a π (que es el mismo que el de π_1 pues son paralelos). Un punto es cualquiera de la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 4z = 1 \end{cases} \to z = 0 \to \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Información suficiente para calcular la ecuación del plano

$$\begin{cases} Pto = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0) \\ \vec{v} = (3, -1, 2) \\ \vec{t} = 3\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + 3\vec{k} \parallel (1,2,1) \end{cases} \to \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x - \frac{2}{3} & y + \frac{1}{3} & z - 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Que, desarrollando por los adjuntos de la primera fila, queda:

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}-\left(y+\frac{1}{3}\right)\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0\rightarrow$$

$$-5\left(x-\frac{2}{3}\right)-\left(y+\frac{1}{3}\right)+7z=0\rightarrow$$

$$\boldsymbol{-5x-y+7z+3=0}$$

Ejercicio 2

Los puntos $A(1,0,2)$ y $B(-1,0,-2)$ son vértices opuestos de un cuadrado. Determinar:

a) El área del cuadrado
b) El plano perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio

a) El área del cuadrado

Como sabemos, el área de un cuadrado es su lado al cuadrado.

En nuestro caso, al ser los puntos dados vértices opuestos, la distancia entre ellos es la longitud de la diagonal, que calculamos cómo el módulo del vector AB:

$$\overrightarrow{AB}=(B-A)=(-1-1,0-0,-2-2)=(-2,0,-4)\rightarrow$$

$$D=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{20}$$

Aplicando Pitágoras, calculamos el lado del cuadrado

$$D^2=L^2+L^2=2L^2\rightarrow L=\frac{D}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{2}}=\sqrt{10}\rightarrow$$

$$\boldsymbol{A}=l^2=\mathbf{10}\,\boldsymbol{u^2}$$

b) El plano perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio

Para calcular la ecuación de un plano π, como ya hemos comentado, tenemos dos maneras: conociendo dos vectores en los que se apoya y un punto o, bien, conociendo un vector perpendicular a él y un punto por el que pasa. En nuestro caso, al ser perpendicular al segmento ***AB***, un vector perpendicular a él es el vector $\overrightarrow{AB}$. Un punto por el que pasa, como se dice en el enunciado, es el punto medio M del segmento AB:

$$M = \left(\frac{1-1}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{2-2}{2}\right) = (0,0,0)$$

La ecuación será entonces, dado que el vector $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular al plano pedido

$$\overrightarrow{AB} = (-2,0,4) \rightarrow \pi \equiv -2x + 0y + 4z + D = 0 \rightarrow -2x + 4z + D = 0$$

Para calcular la constante D utilizamos el hecho de que pasa por el punto M (0,0,0) y este punto, por lo tanto, ha de cumplir su ecuación:

$$-2x + 4z + D = 0 \rightarrow |sutituyendo\ (0,0,0)| \rightarrow 0 + 0 + D = 0 \rightarrow D = 0$$

Quedando entonces la solución:

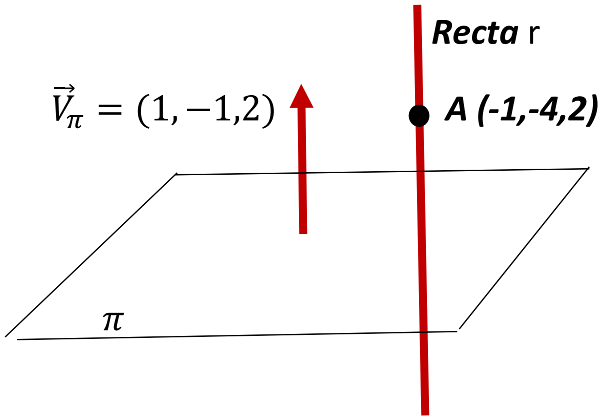
$$\boldsymbol{\pi \equiv -2x + 4z = 0}$$

Ejercicio 3

Se considera el plano $\boldsymbol{\pi \equiv x - y + 2z = 3}$ ***y el punto*** $\boldsymbol{A(-1,-4,2)}$***. Se pide:***

Recta r perpendicular al plano dado que pasa por el punto A

Como observamos en la figura



El vector de la recta coincide con el vector director del plano (que es un vector perpendicular al plano). Por lo tanto, ya tenemos el vector que indica la dirección de la recta. Como además sabemos que pasa por el punto ***A***, ya tenemos los elementos para calcular su ecuación:

$$\frac{x-(-1)}{1} = \frac{y-(-4)}{-1} = \frac{z-2}{2} \rightarrow \boldsymbol{\frac{x+1}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-2}{2}}$$

Ejercicio 4

Calcular la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\boldsymbol{\pi \equiv x + y - z + 6 = 0}$ con la recta

$$\boldsymbol{s \equiv \frac{x}{3} = y - 2 = z + 1}$$

Y es paralela a la recta

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}}$$

Como sabemos, para calcular la ecuación de una recta nos hace falta un punto por el que pasa y un vector que indique su dirección. En nuestro caso, el punto es el de intersección entre el plano dado y la recta s, que calculamos a continuación. Recordamos que para calcular la intersección de recta y plano podemos actuar de dos maneras: por un lado, podemos resolver el sistema de tres ecuaciones (una del plano y dos de la recta) con tres incógnitas. La segunda, y que vamos a utilizar, es poner un punto de la recta en paramétricas y sustituir ese punto en el plano, con lo que calculamos el valor del parámetro y, por lo tanto, del punto. Veamos

$$s \equiv \frac{x}{3} = y - 2 = z + 1 = t \rightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = t + 2 \\ z = t - 1 \end{cases}$$

Sustituyendo el punto genérico de la recta en paramétricas en el plano:

$$\pi \equiv x + y - z + 6 = 0 \rightarrow 3t + t + 2 - (t - 1) + 6 = 0 \rightarrow 3t = -9 \rightarrow$$

$$t = -3 \rightarrow \begin{cases} x = 3t = -9 \\ y = t + 2 = -3 + 2 = -1 \\ z = t - 1 = -3 - 1 = -4 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{P_{\pi \cap s}} = (\boldsymbol{-9}, \boldsymbol{-1}, \boldsymbol{-4})$$

Nos hace ahora falta conocer el vector que indique la dirección de la recta. Creemos fácil de deducir que dicho **vector es el mismo que el de la recta r dada, puesto que son paralelas**. Calculamos, por lo tanto, el vector de la recta r. Dado que la recta r está definida como intersección de dos planos, sabemos que su vector es perpendicular a los dos vectores directores de los planos de los que es intersección. Como debemos de saber también, un vector perpendicular a dos dados es su producto vectorial (también podíamos haber resuelto el sistema de las dos ecuaciones de la recta como intersección de dos planos)

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\imath}(1) - \vec{\jmath}(3) + \vec{k}(-13)$$

Por lo tanto, como ya tenemos un punto por el que pasa y un vector que marca su dirección, la ecuación de la recta pedida es

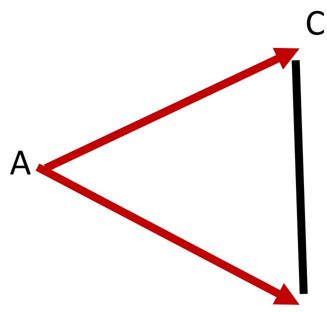
$$\begin{cases} P(-9,-1,-4) \\ \vec{v} = (1,-3,5) \end{cases} \rightarrow \frac{x-(-9)}{1} = \frac{y-(-1)}{-3} = \frac{z-(-4)}{-13} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{\frac{x+9}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+4}{-13}}$$

Ejercicio 5

Calcular el área formada por los puntos $\boldsymbol{A(1,1,2)}$ $\boldsymbol{B(1,0,-1)}$ $\boldsymbol{C(1,-3,2)}$

Debemos de saber que el área del triángulo formado por dos vectores viene dada por la mitad del módulo de su producto vectorial:



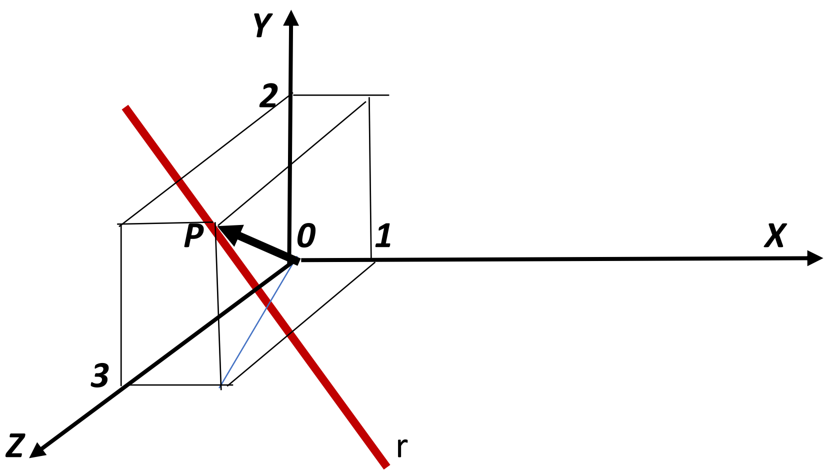
$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right| = \begin{cases} \overrightarrow{AC} = (C - A) = (0,-4,0) \\ \overrightarrow{AB} = (B - A) = (0,-1,-3) \end{cases} \rightarrow$$

$$A=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & -1 & -3\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|\vec{i}(12)-\vec{j}(0)+\vec{k}(0)\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(12)^2}=\boldsymbol{6u^2}$$

Ejercicio 6

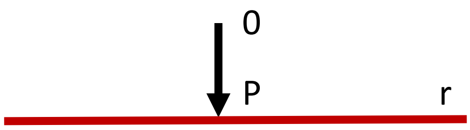
Determina la recta que no corta al plano $\pi\equiv x-y+z=7$ y cuyo punto más cercano al origen es el punto $P(1,2,3)$

Sabemos un punto por el que pasa, el punto P. Como sabemos, nos hace falta además un vector que indique su dirección. En el enunciado nos dicen que no corta al plano π por lo que el vector de la recta ha de ser perpendicular al vector director del plano. Pero hay muchos vectores perpendiculares a uno dado. Nos hace falta tener en cuenta la segunda parte del enunciado. Como hemos comentado más de una vez, un dibujo que refleje las condiciones del problema es fundamental. Veamos:



Si el punto P de la recta es el más cercano al origen creemos que es relativamente fácil de ver que el vector de la recta ha de ser también perpendicular al vector $\overrightarrow{0P}$

.



En este punto de vista igual se ve mejor.

Por lo tanto, el vector de la recta ha de ser perpendicular al vector director del plano y al vector $\overrightarrow{0P}$. Será, entonces, el producto vectorial de ambos:

$$O = (0,0,0)\ P = (1,2,3) \rightarrow \overrightarrow{OP} = (P - O) = (1,2,3)$$

$$\vec{v}_\pi = (1,-1,1)$$

Por lo tanto

$$\vec{v}_r = \overrightarrow{OP} \times \vec{v}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}$$

Y, dado que pasa por el punto $P = (1,2,3)$ su ecuación será

$$\boldsymbol{\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{2} = \frac{x-3}{-3}}$$