victor loza
ACADEMIA ONLINE

PROBLEMAS GEOMETRÍA 3D

En este capítulo vamos a hacer una serie de ejercicios donde aparezcan la mayoría de las situaciones a las que nos podemos enfrentar, repartidas en todas las cuestiones de los problemas. Ha de verse que, si se tiene la teoría clara y con un buen dibujo, **seremos nosotros-as las que digamos *lo que hay que hacer*, las matemáticas nos dirán *cómo hacerlo***.

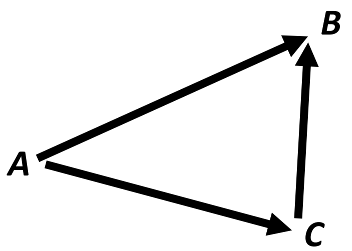
Ejercicio 1

Se consideran los puntos A (1,-3,2), B (1,1,2) y C (1,1,-1)

a) ***¿Pueden ser vértices consecutivos de un rectángulo?***
b) ***Halle, si es posible, las coordenadas de un punto D para que el paralelogramo ABCD sea un rectángulo***

a) ***¿Pueden ser vértices consecutivos de un rectángulo?***

Siempre un dibujo nos ayuda, aunque este caso sea muy sencillo. No hace falta dibujarlos en un sistema XYZ con los datos precisos.



Vamos a ver si alguna pareja de estos tres vectores forma noventa grados, si son perpendiculares. Tenemos, como se ve en la figura, tres posibilidades: pueden ser noventa grados alguno de los ángulos A, B o C. Estudiamos cada uno:

Ángulo A

Formamos los vectores ***AB*** y ***AC***

$$\overrightarrow{AB} = (B - A) = (1 - 1, 1 - (-3), 2 - 2) = (0, 4, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (C - A) = (1 - 1, 1 - (-3), -1 - 2) = (0, 4, -3)$$

Y para saber si ambos vectores son perpendiculares, aplicamos la condición de que su producto escalar sea cero:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \cdot 0 + 4 \cdot 4 + 0 \cdot (-3) = 16 \neq 0$$

Por lo tanto, no son perpendiculares.

Ángulo B

Veamos el ángulo B formado por los vectores ***BA*** y ***BC***

$$\overrightarrow{BA} = (A - B) = (0, -4, 0); \ \overrightarrow{BC} = (C - B) = (0.0. -3)$$

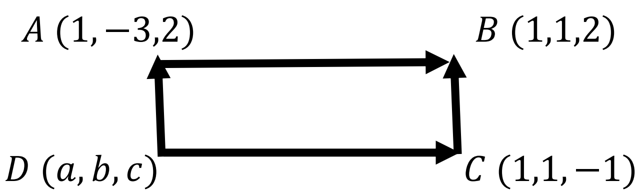
Siendo su producto escalar

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \cdot 0 + (-4) \cdot 0 + 0 \cdot (-3) = 0$$

Por lo tanto, **el triángulo formado por los tres puntos es rectángulo en el ángulo B.** Hacemos entonces el dibujo con esta información**. La respuesta a la pregunta a) sí, pueden ser vértices de un rectángulo.**

Para hallar el vértice ***D***, y contestar a la pregunta b), dibujamos los puntos con la información que tenemos:

b) Calcular el vértice D para que el paralelogramo ABCD sea un rectángulo



Vemos que el vector $\overrightarrow{DA}$ es el mismo que el vector $\overrightarrow{CB}$, por lo tanto

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} \rightarrow (1 - a, -3 - b, 2 - c) = (0,0,3) \rightarrow \begin{cases} 1 - a = 0 \\ -3 - b = 0 \\ 2 - c = 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -1 \end{cases}$$

El punto *D* pedido es *D (1,-3,-1)*

También podíamos haber aplicado que el vector ***DC*** es el mismo que el vector ***AB***.

Ejercicio 2

Considerando los puntos

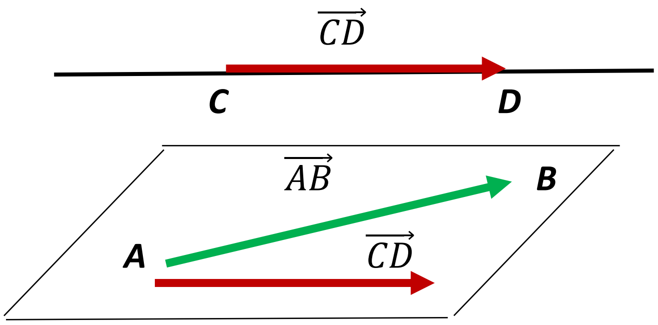
$$\boldsymbol{A(1,1,1)\ B(2,2,2)\ C(1,1,0) y\ D(1,0,0)}$$

Se pide:

a) ***Hallar la ecuación del plano que pasa por A y B y no corta a la recta CD***
b) ***Hallar la ecuación de la recta determinada por los puntos medios de los segmentos AB y CD***

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por A y B y no corta a la recta CD

En la pregunta a) el hecho de que el plano pedido no corte a la recta CD es equivalente a que el plano pedido sea paralelo a la recta CD, ya que no se cortan. Tenemos entonces la siguiente situación:



Insistimos, en este tipo de problemas un dibujo nos ayudará especialmente a deducir qué es lo que hay que hacer, las matemáticas nos dirán cómo hacerlo**

Como se observa en la figura, **el plano pedido se apoya en los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ y pasa por el punto *A***. Estas son las características necesarias para calcular su ecuación. El plano pedido será:

$$\begin{cases} A = (1,1,1) \\ \overrightarrow{AB} = (B-A) = (2-1,2-1,2-1) = (1,1,1) \\ \overrightarrow{CD} = (D-C) = (1-1,0-1,0-0) = (0,-1,0) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -(-1)\begin{vmatrix} x-1 & z-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Donde hemos desarrollado el determinante por los adjuntos de la tercera final por contener esta dos "ceros". Nos queda

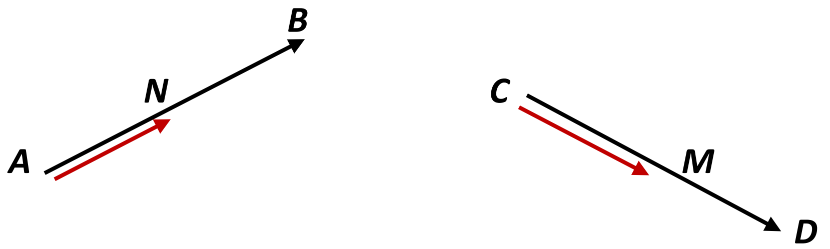
$$\begin{vmatrix} x-1 & z-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x-1-(z-1) = 0 \rightarrow x-z = 0$$

Solución de la pregunta a)

$$\boldsymbol{x - z = 0}$$

b) Hallar la ecuación de la recta determinada por los puntos medios de los segmentos AB y CD

La recta pedida pasa por dos puntos que tenemos que calcular previamente, los puntos medios de los segmentos ***AB*** y ***CD***. Vamos a calcularlos sin utilizar la fórmula que nos dice que el punto medio de un segmento tiene de coordenadas la semisuma de las coordenadas de los extremos. Lo hacemos así para que se vea la forma general de dividir un segmento en un número de partes (aunque nos repetimos porque ya se ha hablado en la teoría de ello)



Como vemos en las figuras se cumple:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\boldsymbol{AN}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{CM}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \overrightarrow{\boldsymbol{CD}} \end{cases} llamando\ a\ \boldsymbol{N(x_N, y_N, z_N)}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{M(x_M, y_M, z_M)} \rightarrow$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \rightarrow (x_N - 1, y_N - 1, z_N - 1) = \frac{1}{2}(1,1,1) \rightarrow \begin{cases} x_N - 1 = \frac{1}{2} \rightarrow x_N = \frac{3}{2} \\ y_N - 1 = \frac{1}{2} \rightarrow y_N = \frac{3}{2} \\ z_N - 1 = \frac{1}{2} \rightarrow z_N = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \rightarrow (x_M - 1, y_M - 1, z_M - 1) = \frac{1}{2}(0,-1,0) \rightarrow \begin{cases} x_M - 1 = 0 \rightarrow x_M = 1 \\ y_M - 1 = -\frac{1}{2} \rightarrow y_N = \frac{1}{2} \\ z_M - 1 = 0 \rightarrow z_N = 1 \end{cases}$$

Los puntos medios son, por lo tanto:

$$N = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)\ y\ M = (1, \frac{1}{2}, 1)$$

La recta pedida es la que pasa por estos dos puntos. Como para calcular la ecuación de una recta nos hace falta conocer de ella un punto y un vector que indique su dirección, tenemos:

$$punto: M\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$vector\ \overrightarrow{NM} = \left(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}\right) \parallel (1, 2, 1)$$

Donde hemos multiplicado por ***(-2)*** al vector ***MN*** por comodidad. Al multiplicar un vector por un número obtenemos otros paralelo a él, por lo que la dirección de la recta que queremos calcular queda determinada igualmente por cualquiera de los dos. **Esto, claramente, NO se puede hacer**

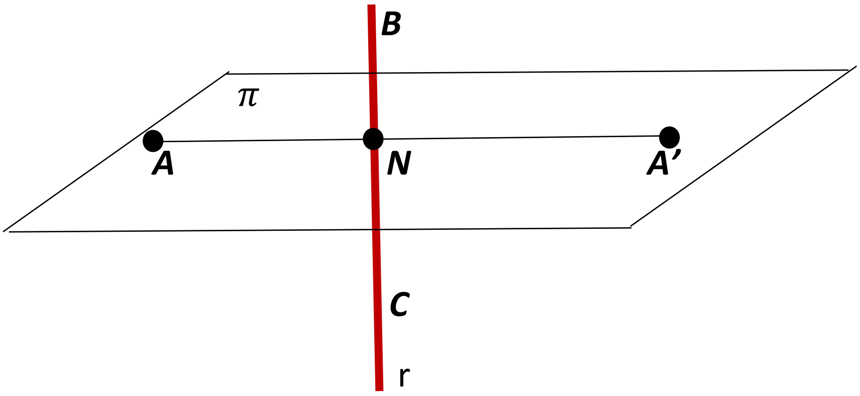
con un punto. Como ya tenemos un punto por el que pasa y su vector director, la ecuación es:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{2} = \frac{z-1}{1}$$

Ejercicio 3

Dados los puntos A (1, -1,2) B (1,3,0) y C (0,0,1) hallar el punto simétrico de A respecto de la recta que pasa por B y C

Como siempre, nos dibujamos la situación



Hemos de ver en la figura que el punto ***N***, punto medio de ***A*** y su simétrico respecto de la recta ***r***, es la intersección del **plano *π*, perpendicular a la recta BC que pasa por A, con la recta BC**. Una vez obtenido el punto ***N***, como ya tenemos un extremo del segmento y su punto medio, podremos calcular el otro extremo A' solución del problema. Los pasos a seguir son entonces:

1º plano *π* que pasa por *A* y es perpendicular a la recta *BC*

2º intersección del plano con la recta *BC* para calcular *N*

3º conocido un extremo del segmento y su punto medio, calculamos el otro extremo.

1º plano π que pasa por *A* y es perpendicular a la recta *BC*

$$A(1,-1,2)\ \overrightarrow{BC}=(-1,-3,1)$$

Hemos de saber que las componentes del **vector *BC*, perpendicular al plano, son los coeficientes de las variables "x", "y" y "z" en la ecuación del plano.** Por lo tanto

$$\pi \equiv -1x-3y+1z+D=0$$

El término ***D*** lo calculamos porque sabemos que el plano pasa por el punto ***A*** y, por lo tanto, ha de cumplir su ecuación:

$$A(1,-1,2)\rightarrow -1(1)-3(-1)+2+D=0\rightarrow D=-4\rightarrow$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\pi \equiv -x-3y+z-4=0}$$

2º intersección del plano con la recta BC para calcular N

Intersección del plano con la recta BC

Calculamos primero, claro, la recta ***BC*** para hallar después la intersección

$$recta\ BC, \qquad r\equiv\begin{cases} C(0,0,1) \\ \overrightarrow{BC}=(-1,-3,1)\end{cases}\rightarrow r\equiv\frac{x-0}{-1}=\frac{y-0}{-3}=\frac{z-1}{1}$$

Para hallar la intersección de un plano y una recta se puede resolver el sistema de las tres ecuaciones con tres incógnitas que definen al plano y a la recta. Nosotros preferimos pasar la recta a paramétricas y sustituir en el plano:

$$r\equiv\begin{cases} x=0-1\cdot t \\ y=0-3\cdot t \\ z=1+1\cdot t\end{cases}$$

Y sustituyendo en el plano:

$$-(-t)-3(-3t)+1+t-4=0\rightarrow t=\frac{3}{11}$$

Sustituyendo este valor de "t" en las ecuaciones paramétricas de la recta tenemos el punto de intersección N

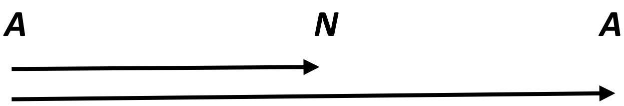
$$r \equiv \begin{cases} x = 0 - 1 \cdot t \\ y = 0 - 3 \cdot t \\ z = 1 + 1 \cdot t \end{cases} \rightarrow t = \frac{3}{11} \rightarrow \begin{aligned} x &= 0 - 1 \cdot \left(\frac{3}{11}\right) = \frac{-3}{11} \\ y &= 0 - 3 \cdot \left(\frac{3}{11}\right) = \frac{-9}{11} \\ z &= 1 + 1 \cdot \left(\frac{3}{11}\right) = \frac{14}{11} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el punto N es el punto

$$\boldsymbol{N = (\frac{-3}{11}, \frac{-9}{11}, \frac{14}{11})}$$

3º conocido un extremo del segmento y su punto medio, calculamos el otro extremo.

$$A = (1, -1, 2) \qquad N = (\frac{-3}{11}, \frac{-9}{11}, \frac{14}{11}) \qquad A' = (x_s, y_s, z_s)$$



Como se ve en la figura

$$\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AN} \rightarrow (x_s - 1, y_s + 1, z_s - 2) = 2\left(\frac{-3}{11} - 1, \frac{-9}{11} + 1, \frac{14}{11} - 2\right) \rightarrow$$

Igualando componentes

$$\begin{cases} x_s - 1 = 2 \cdot \left(-\frac{14}{11}\right) \rightarrow x_s = -\frac{17}{11} \\ y_s + 1 = 2 \cdot \left(\frac{2}{11}\right) \rightarrow y_s = -\frac{7}{11} \\ z_s - 2 = 2 \cdot \left(-\frac{8}{11}\right) \rightarrow z_s = \frac{6}{11} \end{cases}$$

Siendo la solución

$$\boldsymbol{A' = \left(-\frac{17}{11}, -\frac{7}{11}, \frac{6}{11}\right)}$$

Ejercicio 4

Se considera el plano π

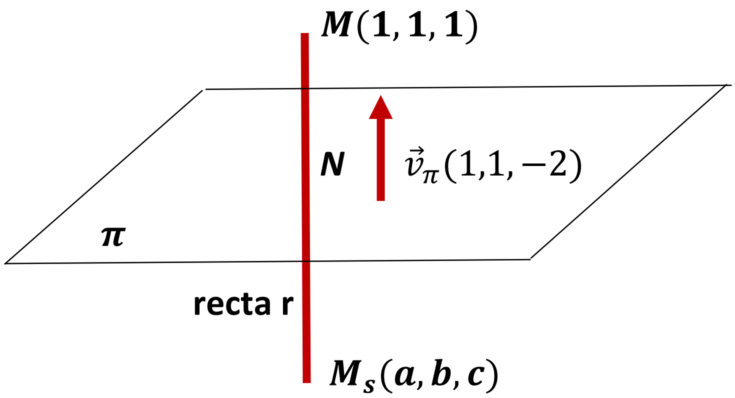
$$\boldsymbol{\pi \equiv x + y - 2z = 6}$$

Se pide:

a) El punto simétrico de M (1,1,1) respecto del plano π

Como hemos quedado, lo primero hacemos un dibujo de la situación

$\pi \equiv x + y - 2z = 6$



El punto ***N***, punto medio entre M y M_s es, como se aprecia en el dibujo, la intersección de la recta que pasa por ***M*** y es perpendicular al plano. Por lo tanto, lo primero que vamos a hacer es calcular esa recta. Después, el punto medio del segmento, ***N***, lo calcularemos como la intersección de esa recta y el plano. Por último, sabiendo un extremo del segmento, el punto ***M***, y el punto medio, el punto ***N***, calcularemos el punto M_s solución del problema.

1º recta r perpendicular al plano

Como se ve en la figura, su vector es el director del plano y un punto por el que pasa es el punto M, por lo tanto

$$r \equiv \begin{cases} M(1,1,1) \\ \vec{v}_r = (1,1,-2) \end{cases} \rightarrow r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{x-1}{-2} = t$$

$$\rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = 1 + 1 \cdot t} \\ \boldsymbol{y = 1 + 1 \cdot t} \\ \boldsymbol{z = 1 + (-2) \cdot t} \end{cases}$$

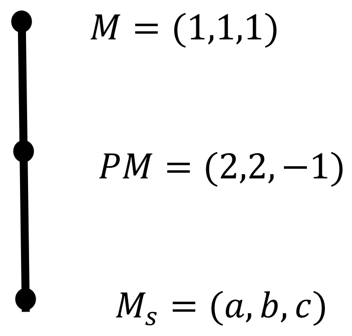
2º Intersección de la recta con el plano

$$\begin{cases} x = 1 + 1 \cdot t \\ y = 1 + 1 \cdot t \\ z = 1 + (-2) \cdot t \end{cases} \rightarrow x + y - 2z = 6 \rightarrow 1 + t + 1 + t - 2(1 - 2t) = 6 \rightarrow$$

$$6t = 6 \rightarrow t = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 1 + t = 2 \\ y = 1 + t = 2 \\ z = 1 - 2t = -1 \end{cases}$$

Por lo tanto, el punto $N = (2,2,-1)$

Sabiendo ya el punto medio del segmento, tenemos



$$\frac{1+a}{2} = 2 \rightarrow a = 3$$

$$\frac{1+b}{2} = 2 \rightarrow b = 3$$

$$\frac{1+c}{2} = -1 \rightarrow c = -3$$

Siendo entonces la solución:

$$\boldsymbol{M_s = (3,3,-3)}$$

Ejercicio 5

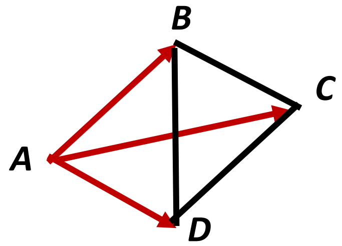
Se consideran los puntos

$$\boldsymbol{A(1,1,1)\ B(0,-2,2)\ C(-1,0,2)\ D(2,-1,-2)}$$

Se pide:

a) Calcular el volumen del tetraedro ABCD
b) Calcular la distancia del punto D al plano formado por los puntos A, B y C
c) Recta que pasa por D y es perpendicular al plano formado por los puntos A, B y C

a) El volumen del tetraedro se calcula:



$$V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right]\right|$$

Donde el corchete que agrupa a los tres vectores denota su producto mixto

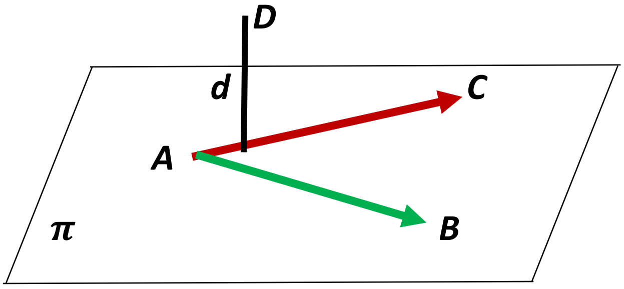
$$\left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix}(AB)_x & (AB)_y & (AB)_z\\(AC)_x & (AC)_y & (AC)_z\\(AD)_x & (AD)_y & (AD)_z\end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}=(B-A)=(-1,-3,1)\ \overrightarrow{AC}=(-2,-1,1)\ \overrightarrow{AD}=(1,-2,-3)$$

$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}-1 & -3 & 1\\-2 & -1 & 1\\1 & -2 & -3\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}|15|=\boldsymbol{\frac{15}{6}u^3}$$

$\boldsymbol{u^3}$ ***unidades cúbicas***

b) Distancia del punto D al plano formado por los otros tres puntos



Para calcular la distancia de un punto al plano se utiliza la siguiente fórmula:

$$\begin{cases} P(x_0, y_0, z_0) \\ \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases} \rightarrow d(P\pi) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Por lo tanto, nos hace falta calcular la ecuación del plano. Como conocemos tres puntos, conocemos ya dos vectores en los que se apoya y, por supuesto, un punto por el que pasa. Estas son las características que nos permiten calcular su ecuación:

$$\overrightarrow{AC} = (-2, -1, 1)\ \overrightarrow{AB} = (-1, -3, 1)\ Pto: A = (1,1,1) \rightarrow$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow (x-1) \cdot 2 - (y-1)(-1) + (z-1) \cdot 5 = 0 \rightarrow$$

$$\boldsymbol{\pi \equiv 2x + y + 5z - 8 = 0}$$

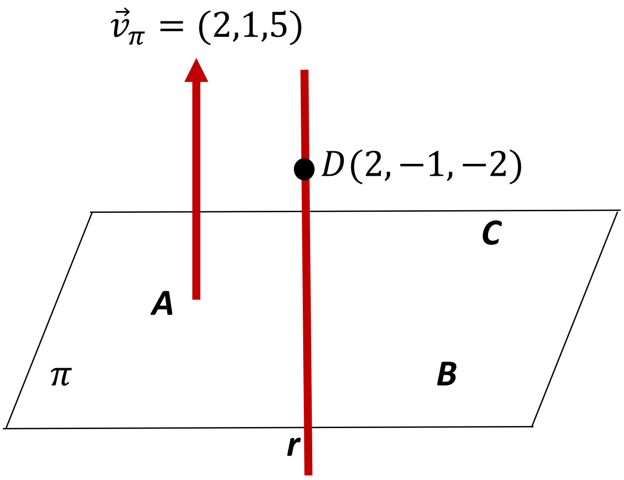
$$\boldsymbol{D\ (2, -1, -2)}$$

$$d(D\pi) = \left| \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 5 \cdot (-2) - 8}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 5^2}} \right| = \left| \frac{-15}{\sqrt{30}} \right| = \frac{\mathbf{15}}{\sqrt{\mathbf{30}}}\ \boldsymbol{u}$$

u: unidades de longitud.

c) Recta que pasa por D y es perpendicular al plano formado por los otros tres puntos.

El plano ya lo hemos calculado en el punto anterior. El dibujo de esta situación es:



$$\pi \equiv 2x + y + 5z - 8 = 0$$

Como se observa en la figura, el vector que indica la dirección de la recta es el vector $\vec{v}_\pi$ y un punto por el que pasa es el punto D. Por lo tanto

$$r \equiv \begin{cases} \vec{v}_r = (2,1,5) \\ D = (2,-1,-2) \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{-2}}$$

Que es la solución.