FUNCIÓN LOGARITMO

Antes de definir la función logaritmo, resolvamos algunas ecuaciones exponenciales sencillas:

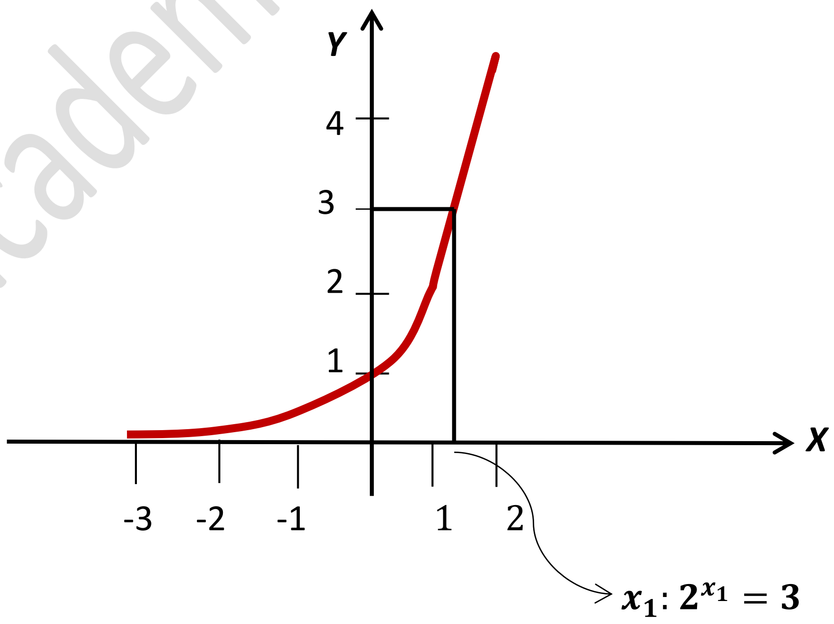
$$2^x = 1 \rightarrow 2^x = 2^0 \rightarrow x = 0$$

$$2^{x+2} = \frac{1}{8} \rightarrow 2^{x+2} = 2^{-3} \rightarrow x + 2 = -3 \rightarrow x = -5$$

Como vemos, si conseguimos que las bases sean iguales no tenemos problemas en despejar el exponente. Pero en el caso

$$\mathbf{2^x = 3}$$

No podemos hacerlo. Nos preguntamos entonces sí, aunque no sepamos cuánto vale, existe ese valor de “x” o esos valores. Para ello, lo mejor es observar la función exponencial y ver si alguna vez alcanza el valor de tres. Si observamos la gráfica que hemos hecho en la lección dedicada a la función exponencial, efectivamente**, hay un único valor de “x” que hace que 2^x valga tres**:



Sólo nos falta ponerle nombre (saber cuánto vale no nos preocupa ahora, sabemos que está entre uno y dos, que ya es bastante) y el nombre no nos debe liar.

Como $\mathbf{2^x = 3 \leftrightarrow x = \log_2 3}$

Y se lee: **equis es el logaritmo en base dos del número tres**

Que es decir lo mismo, pero con la "x" despejada y esta definición hay que sabérsela perfectamente. En general:

$$\boldsymbol{b^x = a \leftrightarrow x = \log_b a}$$

La palabra proviene del griego, logos (razón) y arithmós (número)

En la ley anterior, $\boldsymbol{b^x = a}$, como sabemos que la función $\boldsymbol{b^x}$ es siempre positiva la ecuación sólo tiene sentido si $\boldsymbol{a > 0}$ o lo que es lo mismo, el logaritmo de un número sólo existe si este número es positivo.

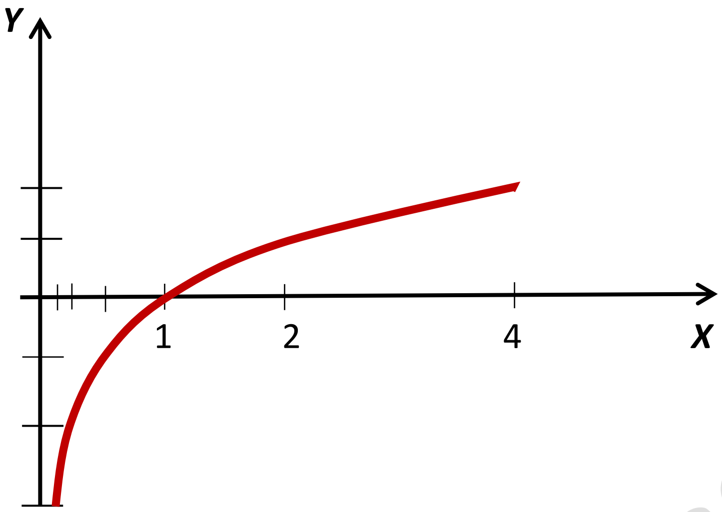
Para familiarizarnos, vamos a dibujar la función $y = \log_2 x$

$y = \log_2 x \leftrightarrow \boldsymbol{2^y = x}$

Por lo tanto, para poder despejar la "y" vamos a dar a "x" valores de potencias de dos:

$x = \frac{1}{8} = 2^{-3}$	$2^y = x = 2^{-3} \rightarrow \boldsymbol{y = -3}$
$x = \frac{1}{4} = 2^{-2}$	$2^y = x = 2^{-2} \rightarrow y = -2$
$x = 1 = 2^0$	$y = 0$
$x = 2 = 2^1$	$y = 1$
$x = 4 = 2^2$	$y = 2$
$x = 8$	$y = 3$

Valores que ya nos permiten deducir como es su gráfica más o menos:



Como ya sabíamos, sólo existe para "x" positivas. Además, cuando "x" se acerca a cero la función se acerca a menos infinito y cuando "x" se acerca a infinito también la función se acerca a infinito.

$$\lim_{x \to 0^+} \log_2 x = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \log_2 x = \infty$$

Dominio de $y = \log_2 x$ es el conjunto $(0, \infty)$. Fijarse que el límite cuando "x" tiende a cero lo hemos hecho sólo por la derecha pues a la izquierda de "cero" no existe función.

Propiedades del logaritmo

$$\log xy = \log x + \log y$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$

$$\log x^y = y \log x$$

$$\log 1 = 0$$

$$\log_b b = 1$$

Propiedades que tenemos que saber perfectamente. Se recomienda practicar.

Ejemplo de aplicación de propiedades:

$$\log \sqrt[5]{\frac{a^b c}{d}} = \log(\frac{a^b c}{d})^{\frac{1}{5}} = |3^{\underline{a}} propiedad|$$

$$= \frac{1}{5} \log \left(\frac{a^b c}{d} \right) = |2^{\underline{a}} propiedad| = \frac{1}{5} [\log a^b c - \log d]$$

$$= \frac{1}{5} (\log a^b + \log c - \log d) = \frac{1}{5} (b \log a + \log c - \log d)$$